

Bsp 84 System

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ 10^{-6} x_2 &= 10^{-6} \end{aligned} \quad \text{Lösung } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrix A ist schlecht konditioniert, denn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= 1, & \|A^{-1}\|_{\infty} &= 10^6 \quad \text{Zeilen} \\ \Rightarrow \kappa_{\infty}(A) &= 1 \cdot 10^6 = 10^6 \end{aligned}$$

Störung von

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \text{durch } \Delta b = \begin{bmatrix} 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\Delta b\|_{\infty} = 10^{-7}, \quad \text{rel. Fehler } \frac{\|\Delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = \frac{10^{-7}}{1} = \delta$$

$r = \delta \kappa_\infty(A) = 10^{-7} 10^6 = 0.1 \rightarrow$ damit in Fehlerabschätzung.

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{|\Delta x_1|}{1} = 10^{-7} \quad (7.25)$$

linke Seite von (7.25) $\leq \frac{2r}{1-r} = \frac{2 \cdot 0.1}{0.9} = \frac{2}{9}$

sehr pessimistische Abschätzung!

Anderer Störung:

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$\|\Delta b\|_\infty = 10^{-7} \Rightarrow r$ unverändert, $\frac{2}{9}$ als Absch.

$\Delta x \cdot \Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 10^6 \cdot 10^{-7} = 0.1$

linke Seite von (7.25)

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

Passt wesentlich besser!

Ursache: Die Kondition von A sagt zu wenig über die einzelnen Zeilen aus

Deshalb: Verbesserung der Abschätzung durch komponentenweise Analyse.

Bis jetzt: $A, \|A\|, \text{ Fehlermatrix } F, \|F\|$

relativer Fehler: $\|F\| \leq \delta \|A\|$ (Forderung)

Jetzt: Betrachten $|A|, |F|$ (Matrizen!)

Fordern

$$|F| \leq \delta |A|$$

d.h. $|f_{ij}| \leq \delta |a_{ij}| \quad \forall i, j = 1:n$

Man beweist:

Lemma 85 Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ "nichtsingulär" und $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$. Es gelte $Ax = b$ und $(A + \Delta A)y = b + \Delta b$.

Gefordert sei

$$|\Delta A| \leq \delta |A| \text{ und} \\ |\Delta b| \leq \delta |b|.$$

Ist die Bedingung

$$\delta \| |A| |A^{-1}| \|_M = r < 1$$

erfüllt, so ist $(A + \Delta A)$ nichtsingulär

und

$$\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_M$ eine der Matrixnormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_F$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige verträgliche Vektornorm.

Bemerkung Die Größe

$$\kappa_c(A) = \| |A| |A^{-1}| \|_M$$

heißt Skeelsche Kondition

Satz 86 Unter den obigen Voraussetzungen gilt die Fehlerabschätzung

$$\boxed{\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq \frac{2r}{1-r}} \quad (7.26)$$

Bsp 87 Wie Bsp 84

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} = |A|, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{bmatrix} = |A^{-1}|$$

$$\Rightarrow \| |A| |A^{-1}| \|_{\infty} = \| I \|_{\infty} = 1$$

Die Voraussetzung des Satzes lautet jetzt

$$\delta \cdot 1 = r < 1 \quad \Rightarrow r = \delta$$

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix} : \quad \Delta x_1 = 10^{-7}, \quad \Delta x_2 = 0$$

$$\delta = r = 10^{-7}$$

$$\frac{\|\Delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \frac{10^{-7}}{1} \leq \frac{2 \cdot r}{1-r} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{1-10^{-7}} \approx 2 \cdot 10^{-7}$$

linke S.

relativ genau

$$\Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = 0.1$$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0.1}{1} = \frac{1}{10} \leq \frac{2 \cdot 0.1}{1 - 0.1} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \\ &= \frac{0.1}{1} = \underline{\underline{0.1}} \\ &= r \end{aligned}$$

Anwendung dieser Sätze auf Rückwärtsanalyse

Def. der Vor- und Rückwärtsanalyse erfolgte für "Problem" $x \mapsto f(x), x \mapsto \tilde{f}(x)$

Fehler im Algorithmus (\tilde{f} an Stelle von f) werden bei Rückwärtsanalyse zurückgespielt auf gestörte Eingabe $\tilde{x}: \tilde{x} \mapsto f(x)$

Zielset: $x \hat{=} (A, b)$
 $f(x) \hat{=} y = A^{-1}b$ (d.h. Lsg von $Ay=b$)
 $(A, b) \mapsto A^{-1}b$

Fehler der Lösung von $A^{-1}b$ werden zurück-
gespielt auf gestörte Daten \tilde{A}, \tilde{b} .

Gestörte Daten: $A: \text{gl}(A) = A + E$
 $\text{gl}(b) = b + e$

Dabei gefordert $\|E\|_{\infty} \leq \delta \|A\|_{\infty}$, mit $\delta = \epsilon \rho$
 $\|e\|_{\infty} \leq \delta \|b\|_{\infty}$

Wir berechnen damit nicht $x = A^{-1}b$, sondern

$$(A + E)\tilde{x} = b + e,$$

wobei diese Gleichung als exakt lösbar angenommen wird.

Wenden Satz 83 an mit $\delta = \epsilon \rho$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{2 \text{ eps } \kappa_\infty(A)}{1 - \text{ eps } \kappa_\infty(A)} \quad (\text{aus (7.25)})$$

Es sei erfüllt: $r = \text{ eps } \kappa_\infty(A) \leq \frac{1}{2}$

Dann folgt aus der obigen Absch.

$$\leq \frac{2 \text{ eps } \kappa_\infty(A)}{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow 4 \text{ eps } \kappa_\infty(A)$$

Folgerung Trotz angenommener exakter Lösung von $(A+E)\tilde{x} = b+e$

kann bei schlecht konditionierter Matrix A (z.B. $\text{ eps } \cdot \kappa_\infty(A) = 1$) das Ergebnis schlecht sein [die Abschätzungen sind scharf]

\Rightarrow Vorsicht bei schlecht konditionierten Aufgaben.

Fehleranalyse des Gauß-Algorithmus

Satz 88 (Fehler bei LR-Zerlegung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ Matrix von Maschinenzahlen.

Die LR-Zerlegung sei möglich, d.h., es treten keine 0-Pivots auf. Dann erfüllen die berechneten Faktoren \tilde{L}, \tilde{R} die Gleichung

$$\tilde{L}\tilde{R} = A + H$$

mit $|H| \leq 3(n-1) \text{eps} (|A| + |\tilde{L}| |\tilde{R}|) + O(\text{eps}^2)$

o.B.
→ Skript

Satz 89 (Fehler der Lösung)

Sind \tilde{L}, \tilde{R} die oben eingeführten Matrizen, so ergibt sich aus Alg 3 und Alg 4 zum Vor- und Rückwärtseinsetzen $\tilde{L}\tilde{y} = b, \tilde{R}x = \tilde{y}$ eine Lösung \tilde{x} von

$$(A + E)\tilde{x} = b$$

mit $|E| \leq n \text{eps} (3|A| + 5|\tilde{L}| |\tilde{R}|) + O(\text{eps}^2)$

Beweis: Rückwärtsanalyse von Alg 3,4:

$$\begin{aligned} (\tilde{L} + F)\tilde{y} &= b \\ (\tilde{R} + G)\tilde{x} &= \tilde{y} \end{aligned} \quad \text{mit } \begin{cases} |F| \leq n \text{eps} |\tilde{L}| + O(\text{eps}^2) \\ |G| \leq n \text{eps} |\tilde{R}| + O(\text{eps}^2) \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow (\tilde{L} + F)(\tilde{R} + G)\tilde{x} = b$ wird wirklich gelöst

$$\Leftrightarrow (\underbrace{\tilde{L}\tilde{R}}_{A+H} + \underbrace{\tilde{L}G + F\tilde{R} + FG}_E)\tilde{x} = b$$

$$E = H + \tilde{L}G + F\tilde{R} + FG$$

$\uparrow \quad \uparrow$
Absch. (*)
Eintrag

Dann nach Absch.

$$|E| \leq 3(n-1)\text{eps}(|A| + |\tilde{L}||\tilde{R}|) + 2n\text{eps}|\tilde{L}||\tilde{R}| + O(\text{eps}^2)$$

\leadsto Abschätzung
des Satzes \square

Bemerkung $|\tilde{L}||\tilde{R}|$ kann groß sein, wenn

Pivots klein sind \Rightarrow Gauß-Alg. ist nicht rückwärts-stabil.

7.5. Partielle Pivoting

Bsp Gleichungssystem

$$1.00 \cdot 10^{-4} x_1 + 1.00 x_2 = 1.00$$

$$1.00 x_1 + 1.00 x_2 = 2.00$$

$$Ax = b$$

Rechner arbeitet mit 3 Dezimalstellen

Rechnung von Hand: $x_2 = 1 - 10^{-4} x_1$

$$\Rightarrow x_1 + 1 - 10^{-4} x_1 = 2$$

$$\Rightarrow 0.9999 x_1 = 1$$

$$x_1 = 1.0001$$

$$x_2 = 1 - 10^{-4} = \underline{\underline{0.9999}}$$

Vom LR-Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^4 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 A = \begin{bmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \\ 0 & -1.00 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.00 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

↙
 $1 - 10\,000 \approx -10^4$
(1 wird ausgelöscht)

ausgleichem Grunde.

⇒ gestaffeltes System

$$1 \cdot 10^{-4} x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \neq$$

$$-1 \cdot 10^4 x_2 = -1 \cdot 10^4 \Rightarrow x_2 = 1 \quad \checkmark$$

Tausch von Zeile 1 und 2 würde das Problem lösen.