

## 7.5. Partielle Pivotsuche

$$\text{Bsp.: } \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1.0001\dots \approx 1.000 \quad (\text{4-stellige Genauigkeit})$$

$$x_2 = 1 - 10^{-4} \approx 1.000 \quad (\text{Genauigkeit})$$

LR-Zerlegung ohne Pivotsuche!

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

... mit Zeilenvertauschung:

$$\tilde{A} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{4-st. Genauigk.}$$

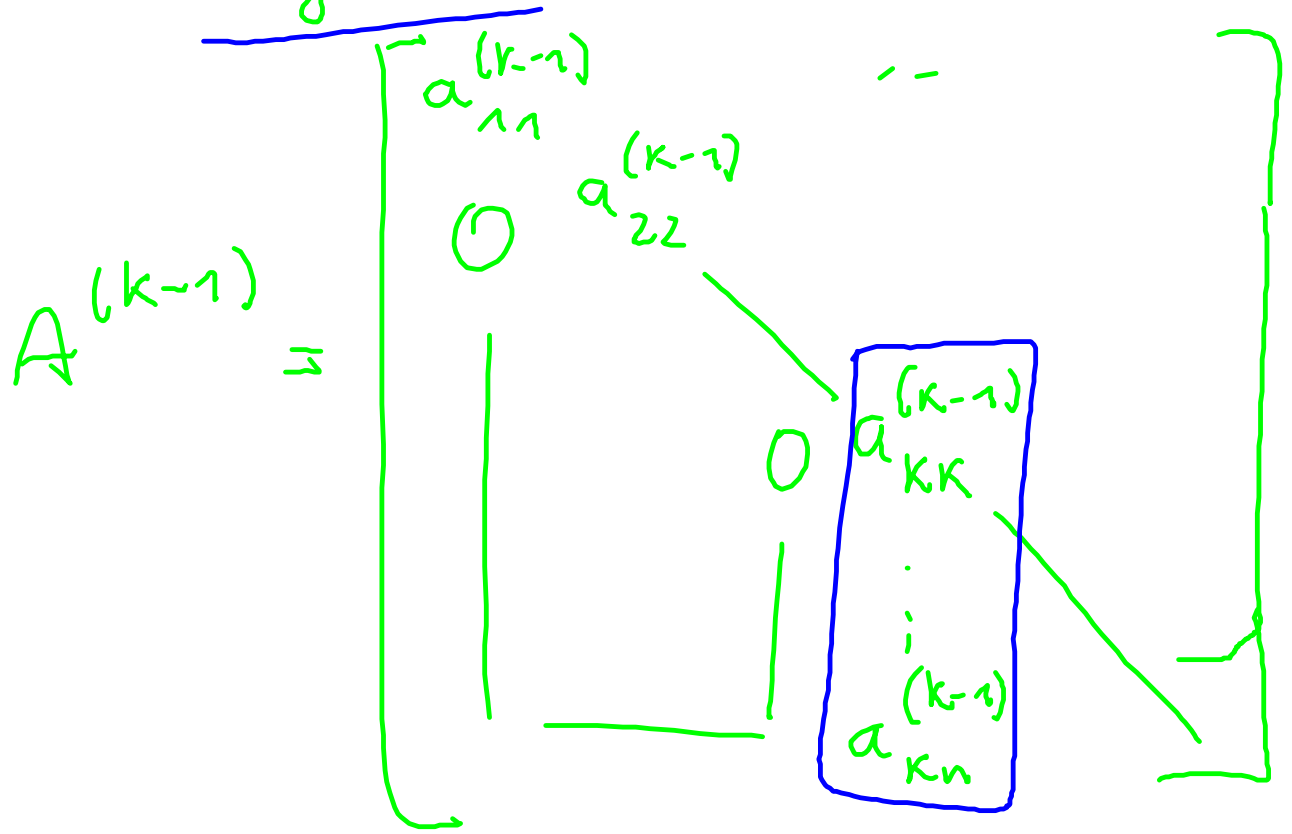
$$M_2 \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \tilde{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - 2 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösen  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{x}_2 = 1 \quad , \quad \tilde{x}_1 = 1$$

Idee: Wähle betragsgrößtes Element  
in der Spalte unterhalb der  
Diagonalen als Pivotelement.



Ziel bei LR-Zerlegung:

$$PA = LR$$

Permutationsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vertauscht  
3. und 4. Zeile  
bzw. Spalte

Linksmultiplikation bewirkt  
Zeilenvertauschung

Rechtsmult. ...

Spaltenvertauschung

Grauß-Alg. mit Zeilenvertauschung

$$M_{n-1} \dots P_3 M_2 P_2 \overset{\curvearrowright}{M_1} P_1 A = R$$

Ziel:  $PA = LR$   $\left| \begin{array}{l} a_{11} \\ \vdots \\ a_{22} \\ \vdots \\ * \end{array} \right.$

Gesucht:  $\tilde{M}_1$ , so dass

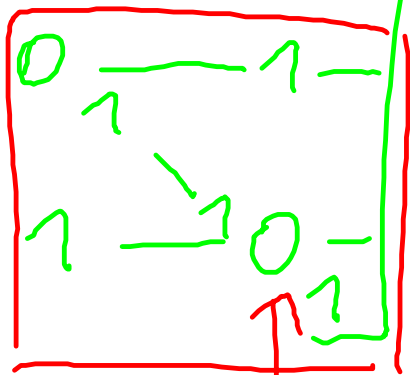
$$P_2 M_1 = \tilde{M}_1 P_2$$

$$P_2 M_1 P_2 = \tilde{M}_1$$

$$P_2^{-1} = P_2$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -t_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 M_2 = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & -t_{i1} & 0 & \dots & 1 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -t_{21} & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

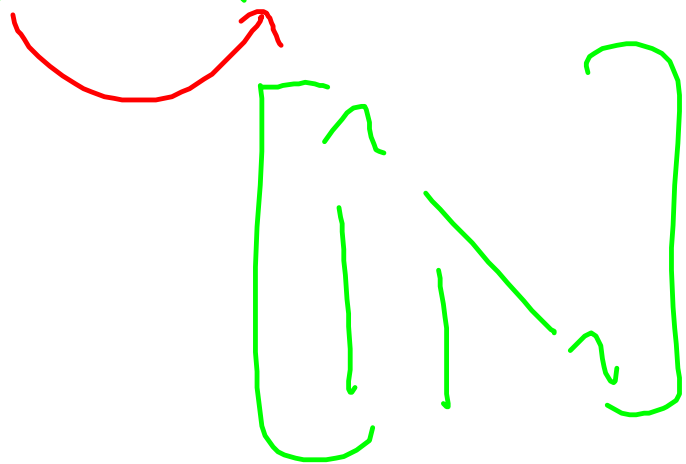


Spalte i

$$P_2 M_2 P_2 = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & -t_{i1} & & & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ & -t_{21} & & & \vdots \\ & \vdots & & & \vdots \end{bmatrix} = \tilde{M}_1$$

analog:

$$M_{n-1} \dots P_3 M_2 \tilde{M}_1 P_2 P_1 A = R$$



am Ende:

$$\underbrace{\tilde{M}_{h-1} \tilde{M}_{h-2} \dots \tilde{M}_1}_{=: L^{-1}} \underbrace{P_{h-1} \dots P_1}_{=: P} A = R$$

$$\boxed{PA = LR}$$

Satz 91: Bei Gauß-Elimination mit part. Pivotisierung gilt

$$PA = LR$$

$$\text{mit } P = P_{h-1} \dots P_1$$

und einer unteren Dreiecksmatrix

$$L \text{ mit } \underline{|l_{ij}| \leq 1}, \quad l_{ii} = 1$$

und

$$L(k+1, i, k) = P_{h-1} \dots P_{k+1} t^{(k)}$$

vgl. Alg. 8'

Vertauschungen mit Indexvektor

Am Anfang  $[1, \dots, n]$

nach Vertauschung  $[1, 2, 4, 3, \dots, n]$

Fehlerabschätzung:

vgl. Satz 89:

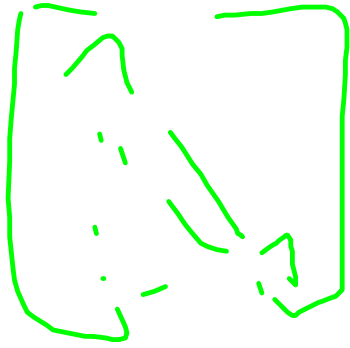
$$(A + E) \tilde{x} = b$$

$$|E| \leq n \epsilon \rho \left( 3 |A| + 5 P^T \|\tilde{x}\| \|R\| + \sigma(\epsilon \rho^3) \right)$$

$$PA = LR$$

$$A = P^T L R, \quad P^{-1} = P^T$$

$$\|E\|_{\infty} \leq n \text{ eps} \left( 3 \|A\|_{\infty} + 5n \|\tilde{R}\|_{\infty} \right) + O(\text{eps}^2)$$



$$\|\tilde{L}\|_{\infty} \leq n$$

$$(A + E) \tilde{x} = b$$

$$\|E\|_{\infty} \leq 8n^3 \gamma \|A\|_{\infty} \text{ eps}$$

$$\gamma = \max_{i,j,k} \frac{|\tilde{a}_{ij}^{(k)}|}{\|A\|_{\infty}}$$

Streng genommen heißt das:

Gauß mit part. Pivotisierung  
 ist nicht rückwärts  
 stabil.

S. 122: Gauß mit part.  
 Pivot. sehr zuverlässig

7.6. Vollständige Pivotisierung



Bem. 93:

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \dots$$

... rückwärts stabil