7.5. Partielle Pivotsuche

Bsp.:

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1{,}0001\ldots \approx 1.000$$

$$x_2 = 1 - 10^{-4} \approx 1.000$$

(4-stellige Genauigkeit)

LR-Zerlegung ohne Pivotsuche!

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$

... mit Zeilenvertauschung:

$$\tilde{A} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{b}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-4} & 1 \end{bmatrix}$$ 4-st. Genauigk.

$$M_1 \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{-4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \tilde{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2\cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{x}_2 = 1 \quad , \tilde{x}_1 = 1$$

<u>Idee:</u> Wähle betragsgrößtes Element in der Spalte unterhalb der Diagonalen als Pivotelement.

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & & & \cdots & \\ 0 & a_{22}^{(k-1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \boxed{\begin{matrix} a_{kk}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{kn}^{(k-1)} \end{matrix}} & \ddots \end{bmatrix}$$

Ziel bei LR-Zerlegung:

$$PA = LR$$

Permutationsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vertauscht 3. und 4. Zeile bzw. Spalte

Linksmultiplikation bewirkt Zeilenvertauschung

Rechtsmult. ...

Spaltenvertauschung

Gauß-Alg. mit Zeilenvertauschung:

$$M_{n-1} \cdots P_3 M_2 P_2 M_1 P_1 A = R$$

Ziel: $PA = LR$ $\left|\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22}^{(2)} & \\ * & & \ddots \end{bmatrix}\right.$

Gesucht: $\tilde{M}_1$, so dass

$$P_2 M_1 = \tilde{M}_1 P_2 \qquad \Big| \; P_2^{-1} = P_2$$

$$P_2 M_1 P_2 = \tilde{M}_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -t_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -t_{i1} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ -t_{21} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Spalte i

$$P_2 M_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -t_{i1} & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -t_{21} & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = \tilde{M}_1$$

analog:

$$M_{n-1} \cdots P_3 M_2 \tilde{M}_1 P_2 P_1 A = R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

am Ende:

$$\underbrace{\tilde{M}_{n-1}\tilde{M}_{n-2}\cdots\tilde{M}_1}_{=L^{-1}}\underbrace{P_{n-1}\cdots P_1}_{=:P}A=R$$

$$\boxed{PA=LR}$$

<u>Satz 91:</u> Bei Gauß-Elimation mit part. Pivotisierung gilt

$$PA=LR$$

mit $P=P_{n-1}\cdots P_1$

und einer unteren Dreiecksmatrix L mit $\underline{|l_{ij}|\leq 1}$, $l_{ii}=1$

und

$$L(k+1:n,k)=P_{n-1}\cdots P_{k+1}t^{(k)}$$

vgl. Alg. 8'

Vertauschungen mit Indexvektor

Am Anfang $[1, \dots, n]$

nach Vertauschung $[1, 2, 4, 3, \dots, n]$

Fehlerabschätzung:

vgl. Satz 89:

$$(A+E)\tilde{x} = b$$

$$|E| \le n\,eps\,\big(3|A| + 5P^T|\tilde{L}||\tilde{R}|\big) + O(eps^2)$$

$$PA = LR$$

$$A = P^T L R, \quad P^{-1} = P^T$$

$$\|E\|_\infty \le n\,\mathrm{eps}\left(3\|A\|_\infty + 5n\|\tilde R\|_\infty\right) + \mathcal{O}(\mathrm{eps}^2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \cdots & & 1 \end{pmatrix} \qquad \|\tilde L\|_\infty \le n$$

$$(A+E)\tilde x = b$$

$$\|E\|_\infty \le 8n^3 \varrho \|A\|_\infty\, \mathrm{eps}$$

$$\varrho = \max_{i,j,k} \frac{|\tilde a_{ij}^{(k)}|}{\|A\|_\infty}$$

Streng genommen heißt das:
Gauß mit part. Pivotisierung ist <u>nicht</u> rückwärts stabil.

S. 122: Gauß mit part. Pivot. sehr zuverlässig

7.6. Vollständige Pivotisierung

Bem. 93:

$$|a_{ij}^{(k)}| \le \ldots$$

... rückwärts stabil