Fortsetzung Cholesky-Zerlegung

$$A = GG^T$$

Existenz der Zerlegung beweisen. Berechnung von G: $G = (g_{ij})$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & g_{nn} \end{bmatrix}}_{G^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = g_{11}^2 \quad \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{kk} = g_{k1}^2 + g_{k2}^2 + \ldots + g_{kk}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2\right)^{1/2} \quad k = 1:n}$$

Für $j > k$

$$a_{jk} = g_{j1}g_{k1} + g_{j2}g_{k2} + \ldots + g_{jk}g_{kk}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{jk} = \frac{1}{g_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ji}g_{ki}\right)}$$

Damit erhält man folgenden Algorithmus zur Cholesky-Zerlegung:

FOR $k = 1 : n$

$$g_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2\right)^{1/2}$$

FOR $j = k+1 : n$

$$g_{jk} = \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ji} g_{ki}\right) / g_{kk}$$

END

END

Kosten der Zerlegung: $\frac{n^3}{6}$ Mult, n Wurzeln

7.10 Bandsysteme

Def: Eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ heißt p-q-Bandmatrix mit oberer Bandbreite

q und unterer Bandbreite p, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j + p$ und $j > i + q$.

Bsp

$$A = \begin{array}{c} \\ p=1 \end{array}\begin{bmatrix} * & \overbrace{* \; *}^{q=2} & & 0 \\ * & \ddots & \ddots & * \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{bmatrix}$$

$p = 1$
$q = 2$

1-2-Bandmatrix

hier $O(4n)$ Elemente

Vorteile: Lohnen sich für große n:
- geringer Speicherplatz
- schnellere Rechnungen

Bsp Randwertproblem

$$-x''(t) = f(t), \quad a < t < b$$

$$x(a) = x_a, \; x(b) = x_b$$

Diskretisierung $\frac{b-a}{n} = h$, $t_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$

$$x''(t_i) \approx \frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1})}{h^2}$$

$\Rightarrow$ Näherung

$$x_0 = x_a$$

$$
\begin{aligned}
\cancel{-x_0} + 2x_1 - x_2 &= f(t_1)\cdot h^2 + x_a \\
-x_1 + 2x_2 - x_2 &= f(t_2)\cdot h^2 \\
&\;\;\vdots \\
-x_{n-2} + 2x_{n-1} \cancel{-x_n} &= f(t_{n-1})h^2 + x_b
\end{aligned}
$$

$$x_n = x_b$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tridiagonale Matrix
1-1-Bandmatrix

<u>Satz 98</u> Die p-q-Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ besitze eine LR-Zerlegung. Dann hat L untere Bandbreite p und R hat obere Bandbreite q.

<u>Beweis:</u> Wir beginnen mit der LR-Zerlegung wie üblich (linke Spalte). Stellen A so dar.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ v & B \end{bmatrix}$$

<u>Dabei</u>: $\alpha \neq 0$

$w_{q+1} \dots w_{n-1} = 0$

$v_{p+1} \dots v_{n-1} = 0$

B ist auch p-q-Bandmatrix

Ein Schritt LR-Zerl.
mit

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{v}{\alpha} & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M_1 A = \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & B - \frac{vw^T}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - \frac{vw^T}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

Mult mit $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{v}{\alpha} & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{v}{\alpha} & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underbrace{B - \frac{vw^T}{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ist wieder p-q-Bandm. (B ist eine, vw^T auch:

$$\begin{array}{cc|ccc} & & w_1 \cdots w_q & & 0 \\ \hline p & \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{array} & \begin{array}{ccc} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array} & & 0 \\ & 0 & 0 & & 0 \end{array}$$

$B - \frac{vw^T}{\alpha}$ hat wieder LR-Zerlegung

$$B - \frac{vw^T}{\alpha} = L_1 R_1$$

Man sieht leicht

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{\alpha} & L_1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}}_{R}$$

z.B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{\alpha} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{\alpha} & L_1 \end{bmatrix}$$

Damit hat Spalte 1 "untere Bandbr." p und Zeile 1 "obere Bandbr." q. Im nächsten Schritt wird Restmatrix $B - \frac{vw^T}{\alpha}$ analog behandelt. usw.

nach n Schritten Resultat gezeigt. □

Dieser Umstand lässt sich bei entsprechenden Algorithmen ausnutzen (Skript)

7.11. Householder-Orthogonalisierung

Die bei LR-Zerlegung auftretenden Instabilitäten lassen sich vermeiden, z.B. durch Householder-Orthogonalisierung.

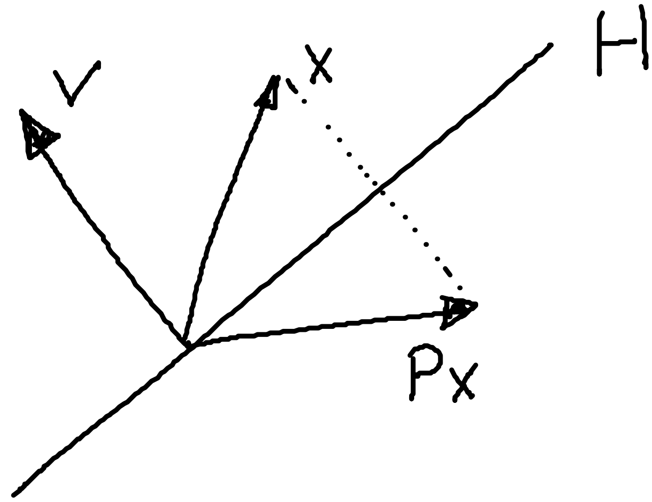
Def: Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Die Matrix

$$\boxed{P = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}}$$

hat offenbar Rang 1 „Rang-1-Modifik."

heißt Householder-Reflexion oder -Matrix.

(1958, A.S. Householder)



$$Px = x - 2\frac{\langle v, x\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

spiegelt x an der zu v orthogonalen Hyperebene H

Ü.A.

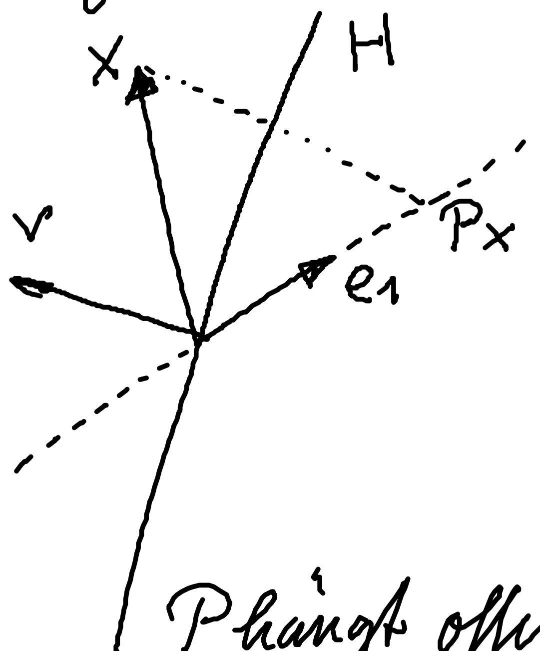
Man prüft leicht nach

(i) P ist symmetrisch, $P = P^T$

(ii) P ist orthogonal, $PP^T = P^TP = P^2 = I$

Anwendung der Householder-Reflexionen:

Gegeben: $x \in \mathbb{R}^n$ (z.B. Spalte 1 einer Matrix)



Bestimmen $v = v(x)$ so, dass die Spiegelung von x an $v^\perp$ ein Vielfaches von e_1 ist.

$$Px = \alpha e_1$$

P hängt offenbar nur von der Richtung von v ab, nicht von $\|v\|$.

Bestimmung von v:

$$\alpha e_1 = Px = x - 2 \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v \qquad (*)$$

Wäre $\langle x, v\rangle = 0$, dann hieße $(*)$: $x = \alpha e_1$, Reflexion nicht nötig. Deshalb o.B.d.A. $\langle x, v\rangle \neq 0$

$$\Rightarrow v \in \operatorname{span}\{e_1, x\}$$

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 x$$

P hängt nicht von Länge von v ab, daher o.B.d.A.

$$v = x - \alpha e_1 \quad \text{Ansatz für } v$$

Es soll gelten

$$Px = \underbrace{\alpha e_1}_{Px} \Rightarrow \underbrace{\langle Px, Px\rangle}_{\langle x, \underbrace{P^T P}_{I} x\rangle} = \alpha \langle e_1, \underbrace{Px}_{\alpha e_1}\rangle$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 = \alpha^2$$

daher $\boxed{|\alpha| = \|x\|}$

Da es nicht auf die Länge von v ankommt.

$$\boxed{v = x - \alpha e_1 \text{ mit } |\alpha| = \|x\|_2}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Um Auslöschung von Stellen zu vermeiden, wählen wir

$$\boxed{\alpha = -\operatorname{sgn}(x_1)\|x\|_2}$$