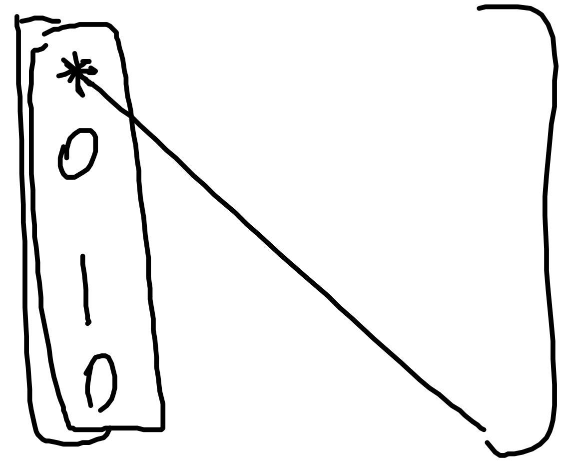
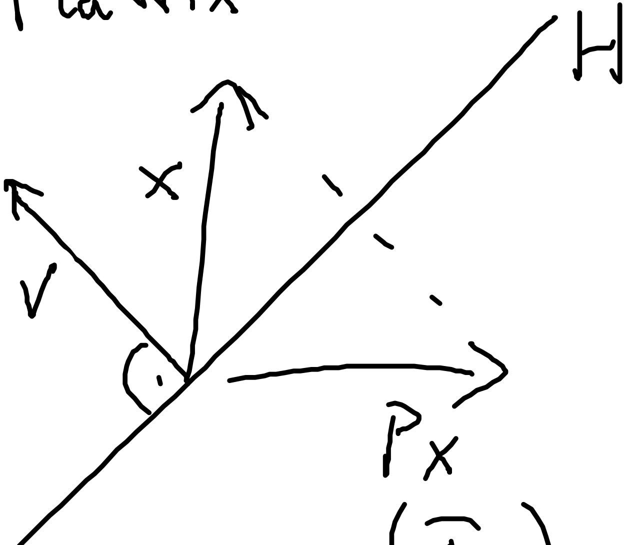
7.11. Householder-Orthogonalisierung



Def.: $\mathbb{R}^n \ni v \neq 0$

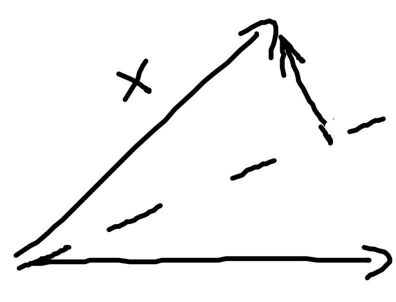
$$P = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$$

heißt Householder-Matrix



$$\alpha e_1 = x - 2\frac{v(v^Tx)}{v^Tv} = x - 2\frac{v^Tx}{v^Tv}v$$

$$2\frac{v^Tx}{v^Tv}v = x - \alpha e_1$$



setze $v = x - \alpha e_1$

$$|\alpha| = \|x\|_2$$

$$Px = \alpha e_1, \quad \alpha = -\operatorname{sign}(x_1)\,\|x\|_2$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

7.12. QR-Zerlegung

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad A = (a_1, \dots, a_n)$

Householder-matrix P_1 bilden mit $x = a_1$

$$A^{(1)} = P_1 A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & - & - & - \\ \hline 0 & a_{22}^{(1)} & & \\ | & \vdots & & \\ 0 & \vdots & & \end{array}\right)$$

$$P_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\text{—}\; 0 \\ \hline 0 & \\ | & \hat{P}_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit Householdermatrix P_2

mit $x = (a_{22}^{(1)}, \dots, a_{m2}^{(1)})$

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & & \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \\ | & 0 & \cdots \\ | & | & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

usw. bis zu $(m \geq n)$

$$\underbrace{P_n \cdots P_1}_{= Q^T} A = R = \begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Ziel:

$$A = QR$$

Lösen des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

wird in zwei Teilschritten:

$$Q\underbrace{Rx}_{=y}=b$$

(i) löse $Qy=b$

$\Leftrightarrow \quad y=Q^Tb$

(ii) löse $Rx=y$

Aufwand:

LR	$\frac{2}{3}n^3$	
QR	$\frac{4}{3}n^3$	$(m=n)$

Vorteil von QR:

$QR=A$ | $LR=A$

$$\|A\|_2 = \|QR\|_2$$

$$\|R\|_2 \le \underbrace{\|Q^T\|_2}_{=1} \|A\|_2$$

$$\kappa(R) \le \kappa(A)$$

$$\|A\| \le \|L\| \, \|R\|$$

$$R = L^{-1}A$$

$$\|R\| \le \|L^{-1}\| \, \|A\|$$

$$\|R^{-1}\| \le \|L\| \, \|A^{-1}\|$$

$$\kappa(R) \le \kappa(L) \cdot \kappa(A)$$

$$\|A\|_2 = \|Q^TQA\|_2$$

$$\le \underbrace{\|Q^T\|_2}_{=1} \|QA\|_2 = \|QA\|_2$$

$$\le \underbrace{\|Q\|_2}_{=1} \|A\|_2 = \|A\|_2$$

Satz 101: $A = QR$, $\operatorname{Rang}(A)$ max.

$A = (a_1, \dots, a_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_m)$

$$\left(A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n\right) \qquad \begin{array}{c} m \times n \\ = (m \times m)(m \times n) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\} = \operatorname{span}\{q_1, \dots, q_k\}$$

$$k = 1, \dots, n$$

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Bild}(Q_1)$$

$$\operatorname{Bild}(A)^\perp = \operatorname{Bild}(Q_2)$$

für $Q_1 = Q(1:m, 1:n)$

$$Q_2 = Q(1:m, n+1:m)$$

$$Q = \left.\left[\underbrace{Q_1}_{n} \middle| \underbrace{Q_2}_{m-n}\right]\right\} m$$

<u>Bew.:</u>

$$a_k = \sum_{i}^{k} r_{ik} q_i \quad , k = 1, \dots, n$$

$1 = 1$

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & \vdots & Q_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & * \\ 0 & \end{bmatrix}}_{R}$$

r

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(Q_1)$$

Wir bezeichnen: $R_1 = R(1{:}n, 1{:}n)$

Dann gilt $A = Q_1 R_1$.

$y \in \mathrm{Bild}(A)$: $\quad y = Ax = Q_1(R_1 x)$

$$\mathrm{Bild}(A)^{\perp} = \mathrm{Bild}(Q_2)$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Z

$$\mathbb{R}^m \ni y = \underset{\in \mathrm{Bild}(A)}{y_1} + y_2 = Q_1 x_1 + Q_2 x_2$$

Satz 102 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Rang n, $m \geq n$

Die Zerlegung $A = Q_1 R_1$ mit $r_{ii} > 0$ ist eindeutig.

Beweis: $A^T A = (Q_1 R_1)^T Q_1 R_1$

$$= R_1^T R_1$$

$$Q_1 = A R_1^{-1}.$$