

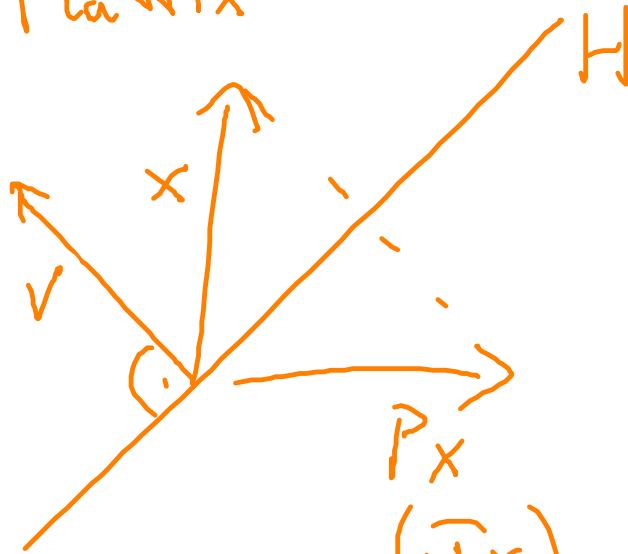
7.11. Householder - Orthogonalisierung

Def.: $\mathbb{R}^n \ni v \neq 0$

$$P = \underline{I} - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$$

heißt Householder-Matrix

$$\begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\alpha e_1 = x - 2 \frac{v(v^T x)}{v^T v} = x - 2 \frac{v^T x}{v^T v} v$$

$$2 \frac{v^T x}{v^T v} v = x - \alpha e_1$$

setze $v = x - \alpha e_1$

$$|\alpha| = \|x\|_2$$



$$P_x = \alpha e_1, \quad \alpha = -\text{sign}(x_1)$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \|x\|_2$$

7.12. QR-Zerlegung

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad A = (a_{11} \dots a_{1n})$$

Householder- P_1 bilden mit $x = a_1$
matrix

$$A^{(1)} = P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & \dots \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{P}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

~

mit Householdermatrix P_2

mit $x = \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & \dots & a_{m2}^{(1)} \end{pmatrix}$

$$P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & & & & \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & & \dots & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

usw. bis zu $(m \geq n)$

$$P_n \dots P_1 A = R = \begin{pmatrix} \text{upper triangular} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= Q^T$

Ziel:

$$A = QR$$

Lösen des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

wird in zwei Teilschritten!

$$QRx = b$$

$\underbrace{\quad}_{=y}$

(i) löse $Qy = b$

$$\Leftrightarrow y = Q^T b$$

(ii) löse $Rx = y$

Aufwand:

LR

$$\frac{2}{3} n^3$$

QR

$$\frac{4}{3} n^3$$

($m = n$)

Vorteil von QR:

$$QR = A$$

$$| LR = A$$

$$\|A\|_2 = \|QR\|_2$$

$$\|R\|_2 \leq \underbrace{\|Q^T\|_2}_{=1} \|A\|_2$$

$$\kappa(R) \leq \kappa(A)$$

$$\|A\| \leq \|L\| \|R\|$$

$$R = L^{-1}A$$

$$\|R\| \leq \|L^{-1}\| \|A\|$$

$$\|R^{-1}\| \leq \|L\| \|A^{-1}\|$$

$$\kappa(R) \leq \kappa(L) \cdot \kappa(A)$$

$$\|A\|_2 = \|Q^T Q A\|_2$$

$$\leq \underbrace{\|Q^T\|_2}_{=1} \underbrace{\|QA\|_2} = \|QA\|_2$$

$$\leq \underbrace{\|Q\|_2}_{=1} \|A\|_2 = \|A\|_2$$

Satz 101:

$$A = QR, \text{ Rang}(A) \text{ max.}$$

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad Q = (q_1, \dots, q_m)$$

$(A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n)$	$m \times n$ $= (m \times m)(m \times n)$
---	--

Dann gilt:

$$\text{span} \{a_1, \dots, a_n\} = \text{span} \{q_1, \dots, q_n\}$$

$k=1, \dots, n$

$$\text{Bild}(A) = \text{Bild}(Q_1)$$

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Bild}(Q_2)$$

für $Q_1 = Q(1:m, 1:n)$

$$Q_2 = Q(1:m, n+1:m)$$

$$Q = \left[\underbrace{Q_1}_n \mid \underbrace{Q_2}_{m-n} \right] \Bigg\}^m$$

Bew.:

$$a_k = \sum_{i=1}^n r_{ik} q_i, \quad k=1, \dots, n$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} | \\ A \\ | \end{array} \right] \\
 \uparrow \\
 \mathbb{R}^n
 \end{array}
 = \begin{array}{c}
 \overset{i=1}{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ Q_1 \vdots Q_2 \\ \vdots \end{array} \right]} \\
 \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_R
 \end{array}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{Bild}(Q_1)$$

Wir bezeichnen: $R_1 = R(1:n, 1:w)$

$$\text{Dann gilt } A = Q_1 R_1$$

$$y \in \text{Bild}(A) : y = Ax = Q_1(R_1 x)$$

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Bild}(Q_2)$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \perp$$

$$\mathbb{R}^m \ni y = \underbrace{y_1 + y_2}_{\in \text{Bild}(A)} = Q_1 x_1 + Q_2 x_2$$

Satz 102 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Rang n , $m \geq n$
Die Zerlegung $A = Q_1 R_1$
mit $r_{ii} > 0$ ist eindeutig.

Beweis:

$$\begin{aligned} A^T A &= (Q_1 R_1)^T Q_1 R_1 \\ &= R_1^T R_1 \\ Q_1 &= A R_1^{-1} \end{aligned}$$