Fortsetzung Ausgleichsprobleme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

QR-Zerlegung von $Ax = b$

$$\rightsquigarrow \quad Q^T A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

<u>Beweis des Satzes:</u> Q orthogonal $\Rightarrow$

$$\|Ax - b\|_2 = \|Q^T(Ax - b)\|_2$$

$$\Rightarrow \|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T(Ax - b)\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix} Rx - b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}\right\|_2^2$$

$$= \|Rx - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2 \geq \|b_2\|_2^2$$

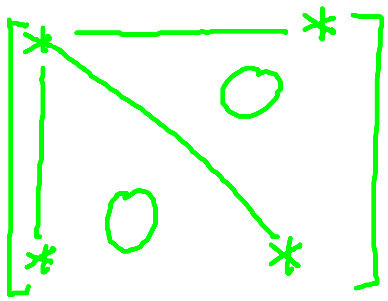
Für $Rx = b_1$, d.h. $x = R^{-1} b_1$ wird deshalb das Minimum angenommen. Existenz von R^{-1}: Folgt aus $\operatorname{rang}(R) = \operatorname{rang}(A) = n$. $\square$

<u>Bemerkung</u> $\|r\|_2 = \|b_2\|$ (Residuum)

7.15. Iterative Verfahren

Nötig für sehr große Systeme, um z.B. Bandstruktur auszunutzen.

<u>Bsp</u> A habe Struktur



Gauß-Elimination schreibt die Matrix voll und zerstört die Struktur

sparse matrix

<u>Ausweg</u> Splitting-Verfahren

7.15.1 Splitting-Verfahren

$$A = M - N \qquad Ax = b$$

$\Rightarrow$ Gleichung $\quad Mx = Nx + b$

Dabei soll M leicht invertierbar sein (z.B. Diagonalmatrix)

$$\Rightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

Fixpunktform

<u>Iterationsverfahren:</u>

$$\boxed{x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b}, \quad k = 1,2,\dots \qquad (7.53)$$

Startvektor $x^{(0)}$

<u>Satz 106</u> Die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

mit $G \in \mathbb{R}^{n,n}$ konvergiert genau dann für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt

$$\rho(G) < 1,$$

wobei $\rho(G)$ der Spektralradius von G ist,

$$\rho(G) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } G\}.$$

<u>Beweis für symmetr. G</u>: Siehe Deuflhard/Hohmann

$\square$

Beispiele

Richardson-Iteration

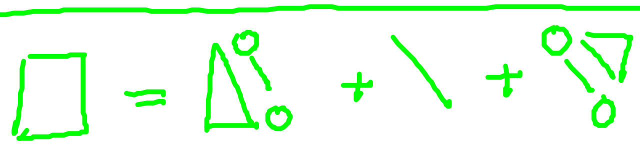
$$A = \underbrace{I}_{M} - \underbrace{(I - A)}_{N}$$

Iteration $\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - A x^{(k)} + b}$

$$G = I - A$$

$$\rho(G) = \max \left\{ \left|1 - \lambda_{max}(A)\right|, \left|1 - \lambda_{min}(A)\right| \right\} < 1$$

Jacobi- oder Gesamtschrittverfahren



Splitting $A = D - (L + U)$

D : Diagonal

$-L$: Unteres Dreieck (ohne Diagonale)

$-U$: oberes Dreieck

$$\Rightarrow D x = (L + U) x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U) x + D^{-1} b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b}$$

Gesamtschrittverfahren

Brauchen zur Konvergenz $\rho\left(D^{-1}(L+U)\right) < 1$

$$\rho\left(D^{-1}(L+U)\right) \underset{*)}{\leq} \|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_i \sum_{j\neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

$\Rightarrow$ erfüllt für strikt diagonaldominante Matrizen A.

*) $G = D^{-1}(L+U)$

$\|G\|_\infty$ erfüllt $\|Gx\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|x\|_\infty$

$Gx = \lambda x$ für E.W. $\forall x$

$\Rightarrow \|Gx\|_\infty = |\lambda| \, \|x\|_\infty$

$\|Gx\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|x\|_\infty$

$\Rightarrow |\lambda_{max}| \leq \|G\|_\infty$

Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren)

Form $$(D-L)x = Ux + b$$

$$x = (D-L)^{-1} U x + (D-L)^{-1} b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = \underbrace{(D-L)^{-1} U x^{(k)}}_{} + (D-L)^{-1} b}$$

Lsg eines gestaffelten Systems pro Schritt

Nachteil: Diese Verfahren sind langsam.

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + C$$

Statt

löst man $$x^{(k+1)} = \omega \left(G x^{(k)} + C \right) + (1-\omega) x^{k}$$

Relaxation, ω R-parameter

$\rightsquigarrow$ Fachliteratur

7.15.2. Das konjugierte Gradientenverfahren

(cg-Verfahren)

Zu lösen sei wieder

$$Ax = b$$

Voraussetzung:

$\boxed{A \text{ symmetrisch und positiv definit}}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Wir minimieren

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

Optimierungsaufgabe

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(x, Ax) - (b, x)}$$

(x, Ax)
$\geq \delta \|x\|^2$
$\delta > 0$
$\Rightarrow f \to \infty,$
$\|x\| \to \infty$
$\Rightarrow \exists$ Min
(Satz von Weierstraß)

$$0 = \nabla f(x) = Ax - b \Rightarrow Ax = b$$

Einfachste Optimierungsmethode dazu:
Gradientenverfahren (Verfahren des steilsten Abstiegs)

$\hookrightarrow -\nabla f(x)$

Verfahren läuft so ab: Aktueller Iterationspunkt $x^{(k)}$

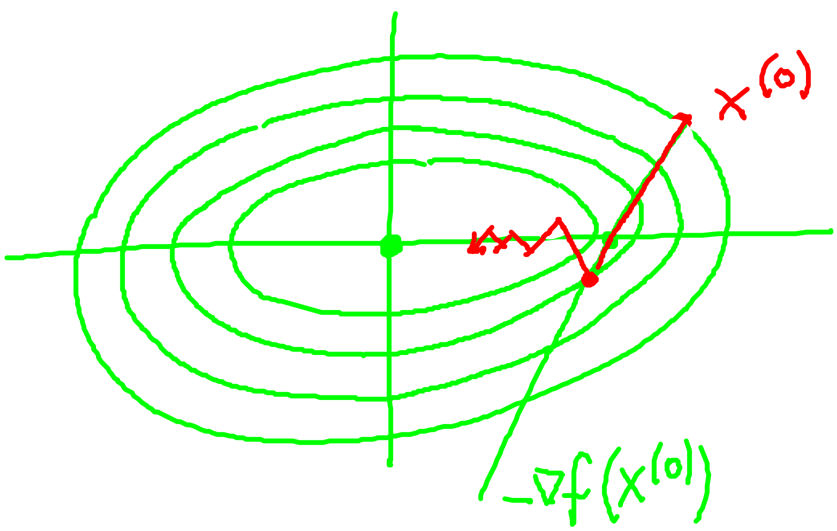
- Bestimme Richtung $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$
- Bestimme Schrittweite α_k, so dass
$$f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$$
- $$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$$

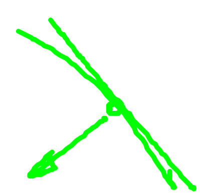
Einfach zu implementieren, aber langsam.

Illustration: Niveaulinien von $\tilde{f}(x) = (x, Ax)$

A sei schlecht kond.
$n = 2$

Niveaulinien:





Herleitung des konjugierten Gradientenverfahren

$$f(x) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(x, Ax) - \frac{1}{2}(\hat{x}, A\hat{x}) - (b, x) + (b, \hat{x})$$

$\hat{x} = A^{-1} b$ sei Optimum

$$= \frac{1}{2}\left(x - \hat{x}, A(x - \hat{x})\right)$$

$$+ (x, \underbrace{A\hat{x}}_{b}) - (\hat{x}, \underbrace{A\hat{x}}_{b}) - (b, x) + (b, \hat{x})$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \hat{x}, A(x - \hat{x})\right) \geq 0$$

Führen neue Norm ein, Energienorm

$$\|x\|_A = \sqrt{(x, Ax)}$$

In der neuen Norm gilt

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2}\|x - \hat{x}\|_A^2$$

Damit sind die Niveaulinien von f in der Energienorm Kreislinien.