Sommersemester 2003
Prof. Fredi Tröltzsch
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

11. Übungsblatt – Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabe 1: Fehleranalyse lineare Gleichungssysteme (4 Punkte)
Bei der Lösung des Systems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

liegen Matrix und rechte Seite nur gestört als

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3.01 & -3.98 \\ 4.01 & 3.01 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.05 \\ 11.01 \end{pmatrix}$$

vor.

(a) Gib eine möglichst gute obere Schranke für den relativen Fehler in x in der Maximums-, der Euklidischen und der 1-Norm an. Rechne (ohne Benutzung von MATLAB!!) auf zwei Stellen genau.

(b) **Programmierteil (3 Punkte):**
Berechne die Lösungen des exakten und des gestörten Systems, den Fehler und vergleiche mit den Abschätzungen aus (a). Benutze zum Lösen von $Ax = b$ den MATLAB-Befehl `x = A \ b`. Kommentiere das Ergebnis.

Aufgabe 2: Kondition (1+1+2+1 Punkte)
Es bezeichne $\lambda_{max}(A), \lambda_{min}(A)$ den betragsmäßig größten bzw. kleinsten Eigenwert einer Matrix A.
Hinweis für LinAlg1-Hörer: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von $A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\Longleftrightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v$.
Der Vektor v heißt dann *Eigenvektor*. Reelle Matrizen können komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren haben. Ist die Matrix symmetrisch so sind alle Eigenwerte reell. Dann existiert eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.

(a) Wenn die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bekannt sind, wie kann man aus ihnen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A^k für $k \in \mathbb{N}$ und von A^{-1} berechnen?

(b) Sei A regulär und die Kondition mit einer zu einer Vektornorm verträglichen Matrixnorm berechnet (d.h. es gilt $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ f.a. $x \in \mathbb{R}^n$). Zeige:

$$\kappa(A) \ge \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|.$$

(c) Die Grenzennorm der Euklidischen Vektornorm ist

$$\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}.$$

Sei A regulär und symmetrisch. Zeige:

$$\kappa_2(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|.$$

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \ge n$ mit Rang $A = n$. Zeige:

$$\kappa_2(A^TA) = \left|\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}\right|.$$

(e) **Programmierteil (3 Punkte):**
Für nichtsymmetrische Matrizen ist $\left|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right|$ im allgemeinen ein schlechtes Konditionsmaß. Betrachte dazu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1.00001 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.00001 \end{pmatrix}$$

und zeige: $\kappa_2(A) = \kappa_2(B)$, aber

$$\left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right| \ll \left|\frac{\lambda_{max}(B)}{\lambda_{min}(B)}\right|.$$

Benutze die MATLAB-Befehle `norm`, `inv`, `eig`, aber **nicht** `cond`!!

Aufgabe 3: Konditionsänderung bei *LR*-Zerlegung (1+3+2 Punkte)
Die Kondition von A gibt an, wie stark sich bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ Fehler in A und b auf den Fehler im Ergebnis x auswirken. Das System wird nun mit einer LR-Zerlegung gelöst. Die Kondition von A sei bekannt.

(a) Schätze die Kondition von R durch die Kondition von A ab.

(b) Schätze die Kondition einer Gauss-Transformationsmatrix M_k mit und ohne Verwendung von Spaltenpivotsuche nach oben ab. Verwende eine beliebige Matrixnorm.

(c) Was ergibt sich aus (b) für die Kondition von R? Kommentiere die Qualität der erhaltenen Abschätzung für große n.

Programmieraufgabe: (1+1+1+3 Punkte)
Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 100 & 10000 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne mit MATLAB ihre LR-Zerlegung.

(b) Löse **mit dieser LR-Zerlegung** die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $b = (1, 1, 1)^T$ und $b = (2, 0, 3)^T$.

(c) Berechne mit MATLAB die Kondition von A bzgl. der 1-,2- und ∞-Norm.

(d) Skaliere die Matrix durch Multiplikation mit einer Diagonalmatrix D so, dass in der skalierten Matrix alle Zeilen gleiche Betragssumme haben. Berechne die Kondition der skalierten Matrix bzgl. der 2-Norm und vergleiche mit (c).

Abgabe/Vorführen in der Woche vom 7.–11.7.03