Sommersemester 2003
Prof. Fredi Tröltzsch
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

12. Übungsblatt – Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabe 1: Cholesky-Zerlegung (2+4+2 Punkte)
Bei der Diskretisierung der zweiten Ableitung einer Funktion (etwa zur Lösung eines Randwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen) tritt die folgende tridiagonale Matrix auf:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(a) Zeige: A ist positiv definit.

(b) Spezialisiere den Algorithmus für die Cholesky-Zerlegung auf den Fall einer symmetrisch positiv definiten, tridiagonalen Matrix, deren Werte in zwei Vektoren $d \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ gespeichert sind. Diese beiden Vektoren sollen am Ende die Diagonale bzw. Nebendiagonale der Cholesky-Zerlegung enthalten. Gib analog zu Algorithmus 10 im Skript eine Beschreibung der Input- und Output-Parameter des Algorithmus an.

(c) Gib die Cholesky-Zerlegung von A explizit an.

Aufgabe 2: Householder-Matrix (2+4 Punkte)

(a) Zeige, dass die im Skript in Formel (7.43) gegebene Householder-Matrix

$$P = I - \frac{2vv^T}{v^T v}$$

bei Linksmultiplikation einen Vektor x an der $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene mit Normalenvektor v spiegelt.

(b) Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und die Determinante einer Householder-Matrix P.

Aufgabe 3: Householder-Transformation (2 Punkte)
Gib den Vektor v aus Formel (7.34) im Skript und die Householder-Matrix P an, die den Vektor $x = (2, 1, 2)^T$ auf ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors spiegelt. Vergleiche die Euklidische Norm von x mit der des Ergebnisvektors.

Abgabe in der Woche vom 14.–18.7.03