Sommersemester 2003
Prof. Fredi Tröltzsch
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übungsblatt – Einführung in die Numerische Mathematik

Aufgabe 1: Newton-Cotes-Formeln (2+1+1 Punkte)
Hinweis: In Tabelle 5.1 Skript stehen in der zweiten Spalte die Werte $ns\sigma_i$ (nicht σ_i)!!
Dabei ist ns der Hauptnenner des i-ten Koeffizienten der Newton-Cotes-Formel n-ter Ordnung

$$\sigma_i = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,dt.$$

In Tabelle 5.1 erkennt man einige Eigenschaften der σ_i und der Newton-Cotes-Formeln, z.B.:

(a) Es gilt $\sigma_{n-i} = \sigma_i$ f.a. $i = 0, \ldots, n$.

(b) Es gilt $\sum_{i=0}^{n} \sigma_i = 1$.

(c) Die Newton-Cotes-Formel der Ordnung n integriert Polynome vom Grad n exakt, d.h. ohne Fehler. Man sagt, *sie hat den Genauigkeitsgrad n.*

Beweise diese Aussagen für allgemeines n.

Aufgabe 2: Kondition der Integration (1+1+1+1 Punkte)
Die Berechnung des bestimmten Integrals ist eine Abbildung, die einer Funktion eine reelle Zahl zuordnet (ein sog. *Funktional*). Wir betrachten sie auf der Menge $C[a,b]$ der stetigen Funktionen, also

$$I : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad I(f) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

(a) Bestimme die absolute und

(b) die relative Kondition dieser Abbildung bezüglich Störungen in f. Verwende als Norm jeweils die L^1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(c) In welchem Fall ist die Integration (absolut oder relativ) schlecht konditioniert?

(d) In welchen der folgenden Fälle ist das Problem also (absolut oder relativ) schlecht konditioniert und warum?

$$(i)\int_0^{2\pi} \sin x\,dx, \quad (ii)\int_0^{\pi} \sin x\,dx, \quad (iii)\int_{-1}^{1} x^2\,dx, \quad (iv)\int_{-1}^{1} x\,dx, \quad (v)\int_3^4 x^3\,dx.$$

Aufgabe 3: (2+3+3 Punkte)
Bei den Newton-Cotes-Formeln sind die Stützstellen äquidistant. Gibt man diese Einschränkung auf, so kann man höhere Genauigkeiten erreichen. Man betrachtet dazu allgemeiner Integrale der Form

$$I(f) := \int_a^b \omega(x) f(x)\,dx$$

mit einer vorgegebenen Gewichtsfunktion $\omega \geq 0$ auf $[a,b]$.

(a) Zeige: Für beliebiges $\omega \geq 0$ und zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_{in} \in [a,b], i = 0, \ldots, n$ gibt es genau eine Integrationsformel

$$I_n(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_{in} f(x_{in}), \tag{1}$$

die für alle $f \in \Pi_n$ exakt ist, für die also $I(f) = I_n(f)$ gilt. Wie sehen die λ_{in} aus?

(b) Zeige: Die Tschebyscheff-Polynome T_k (vgl. 6. Übungsblatt) sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$(f,g)_\omega \quad := \quad \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)\,dx \quad \text{mit} \;\; \omega(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

d.h. es gilt

$$(T_j,T_k)_\omega \quad = \quad \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \frac{\pi}{2}, & j = k \neq 0 \\ \pi, & j = k = 0. \end{cases}$$

Außerdem gilt $(T_{k+1},p)_\omega = 0$ f.a. $p \in \Pi_k$.

(c) Sei $a=-1, b=1$ und ω wie in (b). Die $x_{in}, i=0,\ldots,n$, seien die Nullstellen des $(n+1)$-ten Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1} \in \Pi_{n+1}$.
Zeige: Dann ist die Integrationsformel (1) exakt für alle $f \in \Pi_{2n+1}$, d.h. es gilt $I(f) = I_n(f)$.

Hinweis: Benutze die Aussage: Zu jedem $f \in \Pi_{n+1}$ existieren $q,r \in \Pi_n$ mit $f = qT_{n+1} + r$.

Programmieraufgabe: (3+4+3+2 Punkte)

(a) Schreibe eine Funktion, die eine gegebene Funktion mit der summierten Trapezregel auf einem äquidistanten Gitter integriert. Eingabeparameter sollen sein: Funktion, Intervallgrenzen, Schrittweite bzw. Anzahl der Teilintervalle.

(b) Benutze diese Funktion und MATLAB's eingebaute Integrations- (oder Quadratur-) Routinen, um folgende Integrale zu berechnen:

$$(i) \qquad \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt,$$

$$(ii) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{2^{-n}}{4^{-n}+t^2}\,dt \quad \text{für } n=10 \text{ und } n=100,$$

$$(iii) \qquad \int_{-1}^{1} \cos(te^{4t^2})\,dt.$$

Hinweis: In MATLAB findet man mit dem Befehl `lookfor` *Stichwort* Informationen zu dem angegebenen Stichwort, also z.B. zu *integration*!

(c) Plotte die Funktionen (ii) und (iii) und begründe die Resultate aus (b).

(d) Vergleiche bei (i) und (ii) mit dem exakten Ergebnis. Wieviele Schritte braucht die Trapezregel für eine vernünftige Approximation?

Abgabe/Vorführen in der Woche vom 23.–27.6.03