Kapitel 3

Einige elementare Lösungsmethoden

3.1 Schwingunsgleichung

3.1.1 Anfangs- und Randbedingungen

Wie man sofort sieht, ist die Lösung der Schwingungsgleichung

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \tag{3.1}$$

nicht eindeutig bestimmt. Jede lineare Funktion löst zum Beispiel diese Gleichung. Deshalb gibt man sich zusätzliche Bedingungen vor, welche physikalisch motiviert sind.

<u>1. Anfangsbedingungen</u>

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \qquad \text{Anfangsauslenkung} & (3.2)\\ u_t(x,0) &= \psi(x) \qquad \text{Anfangsgeschwindigkeit} & (3.3)\end{aligned}$$

Wird (3.1) für alle x, d.h. auf ganz $\mathbb{R}$ gelöst, dann legen (3.2)–(3.3) die Lösung fest. Die Aufgabe (3.1)–(3.3) heißt *Cauchyproblem* für (3.1).

<u>2. Randbedingungen</u>

Wird (3.1) wie bei einer Saite, nur in einem beschränkten Gebiet $\Omega = (a, b)$ betrachtet, dann benötigt man zusätzlich zu den Anfangsbedingungen noch Randbedingungen. Gängige Randbedingungen sind

$$u(a,t) = u(b,t) = 0 \qquad \text{Enden fest eingespannt} \tag{3.4}$$

$$u(a,t) = u_x(b,t) = 0 \qquad \text{linkes Ende fest, rechtes frei} \tag{3.5}$$

3.1.2 Die d' Alembertsche Methode für das Cauchyproblem bei der eindimensionalen Schwingungsgleichung

Wir betrachten hier das Cauchyproblem

$$\begin{array}{rcll} u_{tt}(x,t) & = & a^2 u_{xx}(x,t) & \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) & = & \varphi(x) & \\ u_t(x,0) & = & \psi(x) & \end{array} \tag{3.6}$$

mit gegebenen Funktionen φ, ψ und $a \in \mathbb{R}$. Um die Gleichung in Normalform zu bringen, bestimmen wir die Charakteristiken (Abschnitt 2.4, Beispiel 2) und nehmen davon ausgehend die Koordinatentransformation vor (wie in 2.5),

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Dann erhalten wir für $v(\xi, \eta) = u(x,t)$ die Normalform

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Diese Gleichung kennen wir schon aus Abschnitt 1.1 (Beispiel 7). Die allgemeine Lösung war

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

also

$$u(x,t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Die unbekannten Funktionen f und g werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = af'(x) + ag'(x) = \psi(x),$$

also erhalten wir nach Integration der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x) \\ f(x) - g(x) &= \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy + c. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy + \frac{c}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\, dy - \frac{c}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_{x_0}^{x+at} \psi(y)\, dy - \int_{x_0}^{x-at} \psi(y)\, dy\right).$$

Daraus folgt unmittelbar die *d'Alembertsche Formel*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy. \tag{3.7}$$

Jede Lösung von (3.6) muss dieser Formel genügen. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass die d'Alembertsche Formel eine Lösung liefert. Wir haben gezeigt:

Satz 2 *Sind $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ vorgegebene Cauchydaten, so besitzt das Cauchyproblem (3.6) für die eindimensionale Schwingungsgleichung genau eine zweimal stetig partiell differenzierbare Lösung u, welche durch die d'Alembertsche Formel (3.7) gegeben ist.*

<u>Physikalische Interpretation</u> Die Anfangsgeschwindigkeit ψ sei Null. Dann gilt

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} \tag{3.8}$$

Wir betrachten $v(x,t) = \varphi(x-at)$. Offenbar beschreibt v eine nach rechts mit Geschwindigkeit a laufende Welle. Analog steht $\varphi(x+at)$ für eine nach links laufende Welle. Damit setzt sich u zusammen aus beiden Wellen, jeweils mit halber Höhe.

Weiterführende Betrachtungen und Beispiele dazu: Tikhonov/Samarski S.54–61.

3.1.3 Die Spiegelungsmethode für die Halbgerade

Bisher hatten wir $\Omega = \mathbb{R}$, also ein unbeschränktes Ortsgebiet. Jetzt wollen wir $\Omega = \mathbb{R}_+$ betrachten, also die Halbgerade. Die Situation ist sofort völlig anders. Zu lösen sei

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{3.9}$$

bei homogener Randbedingung

$$u(0,t) = 0 \tag{3.10}$$

<u>oder</u>

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3.11}$$

(3.10) steht für ein eingespanntes linkes Ende der Saite und (3.11) für ein frei schwingendes. Grundlage für die Methode ist folgendes

Lemma 2 *Es sei φ und ψ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $x_0 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben und $u(x,t)$ durch die d'Alembertsche Formel gegeben. Dann gilt*

$$(i) \qquad u(x_0,t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

falls φ und ψ ungerade Funktionen bezüglich x_0 sind,

$$(ii) \qquad u_x(x_0,t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

falls φ und ψ gerade Funktionen bezüglich x_0 sind.

Den Beweis heben wir uns für die Übung auf. Nun fällt es leicht die Lösung von (3.9)–(3.10) zu konstruieren.

<u>Lösung von (3.9)–(3.10):</u> $u(0,t) = 0$.

Wir definieren die ungeraden Fortsetzungen

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad , \qquad \psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Um eine sinnvolle Lösung zu erhalten, müssen wir $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ voraussetzen, sonst sind die Funktionen φ und ψ nicht glatt genug, um Satz 2 anwenden zu können.

Nach der d'Alembertschen Formel definiert man auf ganz $\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy.$$

Dann löst u das Problem speziell u das Problem speziell für $x > 0$, $t > 0$. Es erfüllt die die Anfangsbedingungen und wegen Lemma 2 auch die Randbedingung.

Wir schreiben nun noch einmal die Lösung des Problems auf, ohne die Fortsetzung zu benutzen:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy. & x > 0,\ at \leq x \\ \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(y)\, dy. & x > 0,\ at > x. \end{cases}$$

Analog behandelt man:

- die Randbedingung (3.11)
- beschränkte Ortsgebiete $\Omega = (0, l)$ - Hier ist eine Spiegelung an beiden Rändern erforderlich. Dabei können verschiedene Randbedingungen von Interesse sein, zum Beispiel

$$(i) \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$(ii) \quad u_x(0,t) = u(l,t) = 0.$$

  Auf diese Aufgabenstellung wird in der Übung näher eingegangen.

3.1.4 Trennung der Veränderlichen - Fouriermethode

Die Fouriermethode ist eine der zugkräftigsten Methoden für die analytische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen. Wir betrachten hier die

Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} && (3.12) \\ u(x,0) &= \varphi(x) && (3.13) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) && (3.14) \end{aligned}$$

mit den homogenen Dirchletschen Randbedingungen

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3.15}$$

Die Idee besteht darin, die Lösung aus (unendlich vielen) partikulären Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.16}$$

zusammenzusetzen, welche die Randbedingungen (3.15) erfüllen. Dazu setzen wir (3.16) in die Schwingunsgleichung (3.12) ein, erhalten $a^2 X''T = XT''$, also

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

In dieser Gleichung laufen x und t unabhängig voneinander, daher überlegt man sofort, dass beide Seiten ein und der selben Konstanten gleich sein müssen. Diese sei $-\lambda$.

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Zusätzllich müssen die beiden Randbedingungen (3.15) erfüllt sein, d.h. $0 = X(0)T(t) = X(l)T(t)$ für alle t. Daraus schließt man

$$X(0) = X(l) = 0,$$

denn sonst müsste $T(t) \equiv 0$ gelten. Wir erhalten auf diese Weise eine *Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe:* Gesucht sind Werte λ, für welche die Aufgabe

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ X(0) = X(l) &= 0 && (3.17) \end{aligned}$$

eine nichtriviale Lösung hat.

Diskussion von (3.17)

(i) Fall $\lambda < 0$: $X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ erfüllt nur dann die Randbedingungen in (3.17), wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt.

(ii) Fall $\lambda = 0$: Allgemeine Lösung ist $X = ax + b$. Die Randbedingungen ergeben sofort $X \equiv 0$.

(iii) Fall $\lambda > 0$: Wir bekommen die allgemeine Lösung

$$X = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Einarbeiten der Randbedingungen:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

$$X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}l = \pm n\pi$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Nichttriviale Lösungen erhalten wir demnach für die *Eigenwerte*

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zugehörige *Eigenfunktionen* sind

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(Für $-n \in \mathbb{N}$ ergeben sich zu X_n linear abhängige Funktionen.)

Bestimmung der zugehörigen $T_n(t)$:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Die Konstanten A_n und B_n sind noch frei wählbar, um die Anfangsbedingungen an u zu erfüllen. Unsere Partikulärlösungen sind nun

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(A_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\right).$$

Unser *Ansatz* für $u(t,x)$ ist

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t). \tag{3.18}$$

Zunächst bestimmen wir formal A_n, B_n, indem wir (3.18) unbekümmert differenzieren bzw. den Grenzübergang $t \to 0$ gleich unter der Summe vollziehen. Wir rechtfertigen dieses Tun danach.

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3.19}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_t u_n)(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Andererseits können wir - für hinreichend glatte φ, ψ - die Fourierentwicklung

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\, dy$$

und eine analoge für ψ mit Koeffizienten ψ_n. Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{n\pi a}\psi_n.$$

Somit haben wir formal folgende Lösungsdarstellung erhalten:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \varphi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\, dy \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \psi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\, dy. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nun diskutieren wir, ob solche Funktionen u wirklich Lösungen unseres Problems sind.

Satz 3 *Sind Funktionen $\varphi \in C^1[0,l]$ und $\psi \in C^1[0,l]$ mit homogenen Randwerten $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ gegeben, dann konvergiert die Reihe (3.18) gleichmäßig auf $[0,l] \times \mathbb{R}$. Folglich ist u stetig und es gilt*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Beweis: Aus der Theorie der Fourierreihen folgt, dass die oben angegebenen Fouriereihen für φ undψ absolut und gleichmäßig konvergent sind. Folglich sind konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| |\sin\frac{n\pi}{l}x|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n| |\sin\frac{n\pi}{l}x|.$$

Für die u_n folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_n(x,t)| &\leq |A_n||\sin(...)||\cos(...)| + |B_n||\sin(...)||\sin(...)| \\ &\leq |\varphi_n||\sin(...)| + \frac{l}{n\pi a}|\psi_n||\sin(...)|. \end{aligned}$$

Damit überträgt sich die gleichmäßige Konvergenz auf (3.18). Stetigkeit und Randbedingungen für u folgen daraus sofort. □

Viel ist das noch nicht, insbesondere soll ja $u(x,t)$ auch noch die Wellengleichung erfüllen. Wir müssen uns dazu noch mehr gleichmäßige Konvergenz erkaufen ...

Satz 4 *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(i) φ ist dreimal, ψ ist zweimal differenzierbar
(ii) φ''', ψ'' sind von beschränkter Variation
(iii) φ, φ'' und ψ haben homogene Randwerte.

Dann stellt (3.20) eine Lösung der Wellengleichung (3.12) dar, welche auch die Anfangs- und Randbedingungen (3.13)–(3.15) erfüllt.

Beweis: Differenzieren wir die Darstellung von $u(t,x)$ zweimal nach x oder t, so soll die differenzierte Reihe gleichmäßig konvergieren. Durch die Differentiation entsteht ein Faktor der Ordnung n^2, der irgendwie kompensiert werden muss, damit letztlich vor den trigonometrischen Funktionen ein Faktor der Ordnung $1/n^2$ steht. Wir führen das für den Anteil mit ψ vor: Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} I = \int_0^l \psi(y) \sin\frac{n\pi}{l}y\, dy &= \left[-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}y\psi(y)\right]_0^l + \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}y\psi'(y)\, dy \\ &= \frac{l}{n\pi}\int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}y\, \psi'(y)\, dy \end{aligned}$$

wegen $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Einen Faktor $1/n$ haben wir schon gewonnen. Fortsetzung unter Beachtung, dass die Sinusterme am Rande Null ergeben, liefert

$$I = -\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}y\, \psi''(y)\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \int_0^l \psi''(y)\, d\left(\cos\frac{n\pi}{l}y\right) \\
&= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \left\{\left[\psi''(y)\cos\frac{n\pi}{l}y\right]_0^l - \int_0^l \cos\frac{n\pi}{l}y\, d\psi''(y)\right\}.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$|I| \leq c \cdot \frac{1}{n^3}$$

und zusammen mit dem Term $\dfrac{2}{n\pi a}$ in (3.20) steht ein Faktor der Ordnung $1/n^4$ in dieser Reihe. Nach zweimaligen Differenzieren bleibt immer noch $1/n^2$. Analog behandelt man den Teil mit φ. Hier muss man einmal mehr partiell integrieren, weil der Faktor $\dfrac{2}{n\pi a}$ fehlt. □

Die Reihenentwicklung (3.20) kann mit Hilfe einer *Greenschen Funktion* noch prägnanter dargestellt werden. Dazu betrachten wir die *inhomogene Wellengleichung.*

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \text{in } (0,l)\times(0,T) \\
u(x,0) &= \varphi(x) \\
u_t(x,0) &= \psi(x) \\
u(0,t) &= u(l,t) = 0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Zunächst nehmen wir $\varphi = \psi = 0$ an. Wir gehen wie eben vor und entwickeln für jedes t, $f(x,t)$ in eine Fourierreihe,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad u_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(y,t)\sin\frac{n\pi}{l}y\, dy$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(y,t)\sin\frac{n\pi}{l}y\, dy$$

Nach Einsetzen dieses Ansatzes und Koeffizientenvergleich erhält man die Differentialgleichungen

$$u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t)$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die homogenen Anfangsbedingungen liefern $u_n(0) = u_n'(0) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung kann man in der Form

$$u_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s)\ f_n(s)\ ds$$

darstellen, so dass man am Ende die Formel

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s)\ f_n(s)\ ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(y,s) \sin \frac{n\pi}{l} y\ dy \right) ds \\ &= \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t \int_0^l \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) f(y,s) \sin \frac{n\pi}{l} y\ dy\ ds \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x,y,t-s) f(y,s)\ dy\ ds \end{aligned} \tag{3.22}$$

erhält mit

$$G(x,y,t) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x\ \sin \frac{n\pi}{l} y\ \sin \frac{n\pi}{l} at.$$

<u>Definition:</u> Die oben definierte Funktion G heißt *Greensche Funktion* zur Aufgabe (3.21).

Es zeigt sich, dass wir sie auch für $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ verwenden können. Addieren wir die Reihenentwicklung von (3.20), die φ und ψ berücksichtigt, so sehen wir nach Vertauschung von Summation und Integration

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^l \frac{\partial G}{\partial t}(x,y,t)\varphi(y)\ dy + \int_0^l G(x,y,t)\psi(y)\ dy \\ &+ \int_0^t \int_0^l G(x,y,t-s) f(y,s)\ dy\ ds. \end{aligned} \tag{3.23}$$

In dieser Darstellung sieht man besonders schön, wie sich die Lösung linear aus den einzelnen Vorgaben zusammensetzt.

<u>Beispiel:</u> Schwingung einer fest eingespannten Saite

$$l = 1,\ a = 1\ \varphi = 0\ f = 0\ \psi(x) = x(1-x)$$

Einsetzen in die Lösungsdarstellung ergibt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^1 G(x,y,t)y(1-y)\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x\ \sin n\pi t\int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\,dy. \end{aligned}$$

Für das Integral berechnen wir

$$\int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\,dy = \begin{cases} 4/(n^3\pi^3), & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

also

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\sin(2k+1)\pi x\ \sin(2k+1)\pi t.$$

3.2 Wärmeleitgleichung

3.2.1 Anfangs- und Randbedingungen

Wir betrachten die Wärmeleitgleichung

$$u_t(x,t) = a^2\Delta u(x,t), \qquad \text{in } Q = \Omega \times (0,T)$$

in einem Körper $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Es ist physikalisch einleuchtend, dass die Temperatur im Körper bei Fehlen innerer Wärmequellen eindeutig durch die Anfangstemperatur und den Wärmeaustausch mit der Umgebung an der Oberfläche bestimmbar sein sollte. Deshalb gibt man vor: Eine *Anfangsbedingung*

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

sowie *Randbedingungen* auf $\Gamma = \partial\Omega$. Gängige Randbedingungen sind:

1. *Dirchletsche Randbedingung* oder *Randbedingung 1. Art*

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \Gamma \times (0,T) = \Sigma$$

   Hier ist g eine als bekannt vorausgesetzte Randtemperatur.

2. *Neumannsche Randbedingung* oder *Randbedingung 2. Art*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \Gamma \times (0,T) = \Sigma$$

g steht hier für den *Wärmefluss* oder *Temperaturgradienten* am Rand.

3. *Randbedingung 3. Art*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \alpha(g(x,t) - u(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \Gamma \times (0,T) = \Sigma,$$

wobei g die Außentemperatur und α die sogenannte *Wärmeübergangszahl* bezeichnet.

Dirichletsche Randbedingungen werden häufig auch als wesentliche Randbedingungen bezeichnet. Im Gegensatz dazu spricht man bei Randbedingungen 2. oder 3. Art dann von natürlichen Randbedingungen.

Unter vernünftigen Voraussetzungen bestimmen Wärmeleitgleichung, Anfangs- und Randbedingungen die Lösung u eindeutig. Im Fall $\Omega = (0,l)$ müssen die Bedingungen sinnvoll modifiziert werden, weil Γ in zwei Punkte 0 und l zerfällt. Wir erhalten für die Dirchletbedingung

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(l,t) = g_l(t),$$

für die Neumannbedingung

$$-u_x(0,t) = g_0(t) \quad u_x(l,t) = g_l(t)$$

und für die Randbedingung 3. Art

$$-u_x(0,t) = \alpha(g_0(t) - u(0,t)) \quad u_x(l,t) = \alpha(g_l(t) - u(l,t)).$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{auf } \Sigma$$

steht für Wärmeisolation.

3.2.2 Fouriermethode für die eindimensionale Wärmeleitgleichung

Wir betrachten dazu das Anfangsrandwertproblem mit Dirichletscher inhomogener Randbedingung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x,t) \qquad \text{in } (0,1)\times(0,T) \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ u(0,t) &= g_1(t) \\ u(1,t) &= g_2(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen f, φ, g_1, g_2, so dass alle weiteren Umformungen erlaubt sind. Diese Aufgabe entspricht einer unendlichen Platte mit den Oberflächentemperaturen g_1, g_2 und Wärmequellen f in der Platte.

Wir führen dieses Problem auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen zurück, indem wir eine Funktion

$$U(x,t) = g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t))x$$

einführen. Offenbar erfüllt U die Randbedingungen. Wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

und müssen noch $v(x,t)$ bestimmen. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= f - (U_t - U_{xx}) \\ &= f - (g_1' + (g_2' - g_1')x) =: \bar{f}(x,t) \\ v(x,0) &= \varphi(x) - (g_1(0) + (g_2(0) - g_1(0))x) =: \bar{\varphi}(x) \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit das neue Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \bar{f} \\ v(x,0) &= \bar{\varphi}(x) \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nun gehen wir völlig analog zur Schwingungsgleichung vor.

In Stichpunkten:

Ansatz für Partikulärlösungen

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitgleichung

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Nichttriviale Lösungen $X = X_n$:

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \qquad X_n(x) = \sin n\pi x$$

Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n\pi x \qquad (3.26) \\ \bar{f}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin n\pi x \\ \bar{\varphi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \sin n\pi x \end{aligned}$$

wobei $\bar{f}_n$, $\bar{\varphi}_n$ bekannt sind, aber $v_n(t)$ unbekannt. Auswertung der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich,

$$v_n(0) = \bar{\varphi}_n$$

Einsetzen in die Wärmeleitgleichung und formales Differenzieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t) \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) n^2\pi^2 \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin n\pi x$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} v_n'(t) &= -n^2\pi^2 v_n(t) + \bar{f}_n(t) \\ v_n(0) &= \bar{\varphi}_n \end{aligned}$$

ergibt eine gewöhnliche Differentialgleichung für v_n. Diese besitzt die Lösung

$$v_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 t} \bar{\varphi}_n + \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} \bar{f}_n(s)\, ds.$$

Nun Einsetzen in (3.26) unter Beachtung der Formeln für die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_n &= 2\int_0^1 \bar{\varphi}(y)\sin n\pi y\, dy \\
\bar{f}_n(s) &= 2\int_0^1 \bar{f}(y,s)\sin n\pi y\, dy
\end{aligned}$$

un das Ganze etwas umformen ...

Endergebnis:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^1 G(x,y,t)\varphi(y)\, dy + \int_0^t \int_0^1 G(x,y,t-s)f(y,s)\, dy\, ds \\
&+ \int_0^t \frac{\partial G}{\partial y}(x,0,t-s)g_1(s)\, ds - \int_0^t \frac{\partial G}{\partial y}(x,1,t-s)g_2(s)\, ds
\end{aligned}$$

mit der *Greenschen Funktion*

$$G(x,y,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \sin n\pi y\; e^{-n^2\pi^2 t}$$

Die Frage, unter welchen Bedingungen an f, φ, g_1, g_2 dies wirklich eine Lösung ist, wollen wir hier nicht erörtern.

Beispiele:

1. $\varphi = 1$, $f = 0$, $g_1 = g_2 = 0$

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x\; e^{-n^2\pi^2 t}\int_0^1 \sin n\pi y\, dy$$

Wegen

$$\int_0^1 \sin n\pi y\, dy = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 2/n\pi & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ergibt sich

$$u(x,t) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)\pi}\; e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}.$$

Aufgrund der Inkompatibilität von φ mit den Randdaten g_1 und g_2 ergeben sich Probleme für $t \downarrow 0$. Man beachte $u \to 0$ für $t \to \infty$.

2. $\varphi = 0,\ f = 0,\ g_1 = 0,\ g_2 = 1$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\int_0^t 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\pi x) \cos(n\pi 1) e^{-n^2\pi^2(t-s)} \cdot 1\, ds \\ &= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\pi^2} (-1)^n \sin(n\pi x)(1 - e^{-n^2\pi^2 t}) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x\ e^{-n^2\pi^2 t}. \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist eine bekannte Fourierreihe mit der Summe $\frac{\pi}{2}x$ (Bronstein). Also gilt

$$u(x,t) = x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x\ e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Für $t \to \infty$ strebt die Temperatur gegen die stationäre Temperaturverteilung $u(x,t) = x$, was durchaus einleuchtet.

Aber auch hier würde eine sorgfältige Untersuchung der Lösung Probleme hervorbringen.

3. Randbedingungen 2. und 3. Art

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f \\ u(x,0) &= \varphi \\ u_x(0,t) &= 0 \\ u_x(1,t) &= \alpha(g(t) - u(1,t)) \end{aligned}$$

Der Wert α ist immer größer Null, damit die Wärme in die richtige Richtung fließt.

$$G(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \cos \mu_n x \sin \mu_n y\ e^{-\mu_n^2 t}$$

Dabei sind die μ_n die positiven Lösungen der Gleichung

$$\mu \tan \mu = \alpha$$

und

$$N_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\mu_n}{4\mu_n}.$$

Wir erhalten die Darstellung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^1 G(x,y,t)\varphi(y)\,dy + \int_0^t \int_0^1 G(x,y,t-s)f(y,s)\,ds \\ &+ \alpha \int_0^1 G(x,1,t-s)g(s)\,ds. \end{aligned}$$

Bei diesem Problem taucht also keine Ableitung der Greenschen Funktion auf.

3.3 Laplace-Gleichung

3.3.1 Randwertaufgaben für die Laplace-Gleichung

Sei $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Natürlich ist u nicht eindeutig festgelegt, *jede lineare Funktion* löst diese Gleichung. Deshalb fordert man zusätzliche *Randbedingungen* und kommt so zu den *Randwertaufgaben*.

Beispiele von Gebieten Ω und ihren Rändern Γ sind im Fall $n = 2$:

1. Einheitskreis: $\Omega = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 < 1\}$, $\Gamma = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 = 1\}$ (beschränkt)

2. Halbebene: $\Omega = \{(x,y)|\ x > 0\}$, $\Gamma = \{(x,y)|\ x = 0\}$ (unbeschränkt)

3. Parabel: $\Omega = \{(x,y)|\ y > x^2\}$, $\Gamma = \{(x,y)|\ y = x^2\}$ (unbeschränkt)

Die Begriffsbildung für die Randwertaufgaben erfolgt völlig analog zu der Wärmeleitgleichung:

Erste Randwertaufgabe, Dirchlet-Problem:

Gegeben: Stetige Funktion f auf Γ
Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad \forall x \in \Omega \\ u(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Gamma \end{aligned}$$

<u>Zweite Randwertaufgabe, Neumann-Problem:</u>

Gegeben: Stetige Funktion f auf Γ
Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Gamma \end{aligned}$$

<u>Dritte Randwertaufgabe:</u>

Gegeben: Stetige Funktionn α, β, f auf Γ
Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad \forall x \in \Omega \\ \alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta(x)u(x) &= f(x) \qquad \forall x \in \Gamma \end{aligned}$$

3.3.2 Lösung des Dirchletproblems für einen Kreis

Wir lösen die Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= f \qquad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

für den Einheitskreis

$$\Omega = \{(x, y) |\, x^2 + y^2 < 1\}.$$

In diesem Fall führt man am besten Polarkoordinaten ein und sucht $u(r, \varphi)$. Die Funktion f habe die Form $f = f(\varphi)$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Nach Transformation der Differentialgleichung in Polarkoordinaten erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} &= 0 \\ u(1, \varphi) &= f(\varphi) \end{aligned} \tag{3.27}$$

$0 < r < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Wieder wenden wir die Fouriermethode an und machen für partikuläre Lösungen den Ansatz

$$u = R(r)\Phi(\varphi).$$

Nach dem nun bereits bekannten Schema ergeben sich für R und Φ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi'' + \lambda\Phi &= 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0 \end{aligned}$$

Man nutzt die 2π-Periodizität für die Randbedingungen von Φ

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

und erhält am Ende $\lambda = 0$ oder $\lambda = n^2$. Es ergeben sich die Eigenfunktionen

$$\Phi_n = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

und $\Phi_0 = a_0/2$. Die Gleichung für r hat die Lösungen r^n und r^{-n}. Die zweite Lösung ist singulär bei $r = 0$, also wählen wir r^n,

$$\begin{aligned} u_n(r,\varphi) &= r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \\ u_0(r,\varphi) &= \frac{a_0}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt setzen wir also an

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{3.28}$$

mit unbekannten Koeffizienten a_i und b_i. Diese Koeefizienten sind schnell aus der Fourierentwicklung von f bestimmt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \qquad n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \qquad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz der Reihe (3.28) mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß. Wegen $r \leq 1$ ist

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

eine Majorante. Ist sie konvergent ? Dazu sei f' stückweise stetig. Dann folgt zum Beispiel für b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\varphi\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi f'(\varphi)\,d\varphi \\ &= 0 + \frac{1}{n}\beta_n, \end{aligned}$$

wobei β_n die Fourierkoeffizienten von f' sind. Weil f' insbesondere quadratisch integrierbar ist, folgt aus der Theorie der Fourierreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2 < \infty.$$

Das ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\beta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\beta_n^2\right) < \infty.$$

Analoges gilt für a_n. Damit ist (3.28) gleichmässig konvergent und $u(r,\varphi)$ stetig in $\bar{\Omega}$. In Ω, d.h. für $r < 1$, erzeugt der Faktor r^n die gleichmässige Konvergenz der entsprechenden Ableitungen von u. Es gilt daher $\Delta u = 0$ in Ω.

Folgerung: Für stückweise glattes f mit $f(0) = f(2\pi)$ stellt (3.28) eine Lösung des Dirchlet-Problems (3.27) dar.

Es gilt jedoch sogar der

Satz 5 *Sei f eine beliebige auf $[0,2\pi]$ stetige Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann stellt (3.28) eine Lösung des Dirchlet-Problems (3.27) dar.*

Analog zu unserer früheren Vorgehensweise formen wir nun (3.28) um, indem wir die Formeln für a_n und b_n einsetzen:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\psi)(\cos n\psi\cos n\varphi + \sin n\psi\sin n\varphi)d\psi$$

Mit Hilfe von $\cos n\psi\cos n\varphi + \sin n\psi\sin n\varphi = \cos n(\psi-\varphi)$ formt man weiter um

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\varphi)\,d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)(1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\psi-\varphi)\,d\psi \end{aligned}$$

Jetzt verwendet man die trickreiche Umformung

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathrm{Re}\, e^{in\omega} \\
&= \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\omega})^n \\
&= \mathrm{Re} \frac{1}{1 - re^{i\omega}}
\end{aligned}$$

und erhält nach etwas Rechnen

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\psi - \varphi) &= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n(\psi - \varphi) \\
&= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)}.
\end{aligned}$$

Am Ende ergibt sich so das *Poissonsche Integral*

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi.$$

Für einen Kreis mit Radius R lautet die Formel

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi.$$

Schauen wir uns die Formel noch etwas genauer an, dann kommt man noch zu einer anderen Darstellung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} f(y) \frac{|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{y} - \vec{x}|^2}\, dS_y.$$

Bemerkung: Für die Kugel gilt

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{\partial B_R} f(y) \frac{|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}\, dS_y.$$

oder

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{\partial B_R} f(\vartheta', \varphi') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}}\, dS_y,$$

wobei γ der Winkel zwischen den Punkten (r, ϑ, φ) und $(R, \vartheta', \varphi')$ ist.

Beispiel: Stationäre Wärmeleitung

Wir betrachten das Ganze zweidimensional für einen Kreis mit Radius 1. Auf der einen Hälfte liege die Temperatur T an, auf der anderen die Temperatur 0. Der Prozess sei so lange gelaufen, dass wir von einer stationären Wärmeleitung sprechen können.

Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so fest, dass

$$f(\psi) = \begin{cases} T & \text{für } 0 \leq \psi < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \psi < 2\pi \end{cases}$$

gilt. Nach unserem Reihenansatz vor der Poisson-Formel gilt

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n(\psi - \varphi)\, d\psi.$$

Mit unserem speziellen f erhalten wir

$$u(r, \varphi) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\pi} \cos n(\psi - \varphi)\, d\psi.$$

Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos n(\psi - \varphi)\, d\psi &= \left[\frac{1}{n} \sin n(\psi - \varphi)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n}(\sin n(\pi - \varphi) - \sin(-n\varphi)) \\
&= \frac{1}{n}(\sin(n\pi - n\varphi) - \sin n\varphi) \\
&= \frac{1}{n}(\cos n\pi \sin(-n\varphi) - \sin n\varphi) \\
&= \frac{1}{n}(-1)^n \sin(-n\varphi) - \sin n\varphi) \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade,} \\ \frac{2}{n} \sin n\varphi & n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Das Ganze eingesetzt ergibt

$$u(r, \varphi) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} \frac{2}{2k+1} \sin(2k+1)\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erhalten wir den Mittelwert $u = \dfrac{T}{2}$. Für $\varphi = \pi/2$ und $r = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} u(1, \pi/2) &= \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \\ &= \frac{T}{2} + 2 \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= T. \end{aligned}$$