Kapitel 6

Die Finite-Elemente-Methode (FEM)

6.1 Approximation von Funktionen einer oder zweier Veränderlicher durch Basisfunktionen

Digitale Technik kann keine stetigen Funktionen insgesamt verarbeiten, sondern nur endlich viele Zahlenwerte. Also muss man Funktionen sinnvoll durch endlich viele Werte annähern. Sehr einfach ist dies bei Funktionen einer reellen Veränderlichen.

$$h = \frac{b-a}{M} \quad x_i = i \cdot h + a, \quad i = 0, .., M \quad u_i = u(x_i)$$

Wir ersetzen die Funktion u durch den Polygonzug durch die Stützstellen. Es gilt

$$u_h(x) = u(x_i) + \frac{x - x_i}{h} \cdot (u(x_{i+1}) - u(x_i)) \qquad \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Man kann dies aber auch anders darstellen. Dazu führt man die Basisfunktionen w_i

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{in } x_i \\ \text{stetig, linear} & \text{in}[x_{i-1}, x_i] \text{ bzw. } [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt offenbar

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{M} u_i w_i(x) \qquad u_i \text{ wie oben}$$

Vorteil: Alle diese Funktionen haben die gleiche Gestalt und nur einen lokalen Träger.

Wir können diese Idee ohne Probleme ins 2-Dimensionale übertragen. Auch hier wollen wir einen Ansatz mit stückweise linearen Funktionen des Typs

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{M} u_i w_i(x).$$

betrachten. Die u_i sind wieder die Werte in den Gitterpunkten. Wir müssen nur noch erklären, wie die Ansatzfunktionen w_i genau definiert sind. Zur Demonstration der Grundkonstruktion sei Ω ein Quadrat. Wir zerlegen dieses Quadrat in Teilquadrate, indem wir jede Quadratseite in M Teilstücken teilen:

$$x_\nu = \nu \cdot h \quad y_\mu = \mu \cdot h \quad \nu, \mu = 1..M-1.$$

Mit $\Omega_{\nu\mu}$ bezeichnen wir nun ein sechseckiges Gebiet mit den Mittelpunkt (x_ν, y_μ). Die Eckpunkte dieses Sechsecks sind $(x_{\nu-1}, y_{\mu-1})$, $(x_\nu, y_m u - 1)$, $(x_{\nu+1}, y_\mu)$, $(x_{\nu+1}, y_{\mu+1})$ $(x_\nu, y_{\mu+1})$ und $(x_{\nu-1}, y_\mu)$ (siehe Skizze). Durch Verbindung des Mittelpunktes mit den Eckpunkten entstehen sechs Teildreiecke.

Wir fordern nun für die Ansatzfunktionen $\varphi_{\nu\mu}(x, y)$
1. Die Funktion sei linear in jedem Teildreieck.
2. Die Werte in den Gitterpunkten seien gegeben durch

$$\varphi_{\nu\mu}(x_k, y_l) = \begin{cases} 1 & k = \nu,\ l = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus, dass $\varphi_{\nu\mu}(x, y) = 0$ gilt außerhalb von $\Omega_{\nu\mu}$, d.h. diese Funktionen haben wieder lokalen Träger.

Formeln für die Ansatzfunktionen $\varphi_{\nu\mu}$:

Im Dreieck 1: Prinzipiell gilt $\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ Offenbar gilt: $\alpha_1 = D_x\varphi$ und $\alpha_2 = D_y\varphi$. Im Dreieck 1 gilt $D_x\varphi = 0$ und $D_y\varphi = 1/h$, also ergibt sich

$$\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 + \frac{1}{h} y$$

Für $y = \mu \cdot h$ folgt

$$1 = \alpha_0 + \frac{1}{h} \cdot \mu \cdot h \;\Rightarrow\; \alpha_0 = 1 - \mu$$

$$\varphi_{\nu\mu} = 1 - \mu + \frac{1}{h} y = 1 + (\frac{y}{h} - \mu)$$

Dreieck 2: $D_y\varphi = -1/h \qquad D_y\varphi = 1/h$

$$\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 - \frac{1}{h}x + \frac{1}{h}y$$

Damit gilt hier speziell

$$1 = \alpha_0 - \nu + \mu$$

und damit

$$\varphi_{\nu\mu} = 1 + \nu - \mu - \frac{1}{h}x + \frac{1}{h}y = 1 - (\frac{x}{h} - \nu) + (\frac{y}{h} - \mu).$$

Analog berechnet man bei den anderen Dreiecken.

$$\varphi_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 + (\frac{y}{h} - \mu) & \text{Dreieck 1} \\ 1 - (\frac{x}{h} - \nu) + (\frac{y}{h} - \mu) & \text{Dreieck 2} \\ 1 - (\frac{x}{h} - \nu) & \text{Dreieck 3} \\ 1 - (\frac{y}{h} - \mu) & \text{Dreieck 4} \\ 1 + (\frac{x}{h} - \nu) - (\frac{y}{h} - \mu) & \text{Dreieck 5} \\ 1 + (\frac{x}{h} - \nu) & \text{Dreieck 6} \end{cases}$$

Wir haben nun die gewünschten Basisfunktionen konstruiert, und zwar insgesamt $N = (M-1)^2$ viele. Der Ansatz ist also hier

$$u(x,y) = \sum_{\nu,\mu=1}^{M-1} u_{\nu\mu}\varphi_{\nu\mu}(x,y).$$

Bemerkung: Dieser Ansatz führt nur auf Funktionen mit homogenen Randwerten.

Es gilt:
(i) $\varphi_{\nu\mu} \in H_o^1(\Omega) \quad \forall \nu, \mu$ (siehe Beispiel 5 im Abschnitt 5.1)
(ii) $\varphi_{\nu\mu}$ linear unabhängig von φ_{ij}, falls $i \neq \nu$ oder $j \neq \mu$
(iii) $V_h = \text{span}\{\varphi_{\nu\mu}\}$ hat Dimension $(M_1)^2$

V_h ist ein endlichdimensionaler Teilraum von $V = H_o^1(\Omega)$.

6.2 Grundzüge der FEM

Alle unsere Randwertaufgaben führten auf das Problem

$$B[u, v] = f(v) \qquad \forall v \in V. \qquad (V \subset H^1(\Omega)) \tag{6.1}$$

Bei der FEM geht man so vor: $V_h \subset V$ sei endlichdimensionaler Teilraum, der in gewisser Hinsicht vom "Diskretisierungsparameter" h abhängig ist. Bei den Ansatzfunktionen aus Abschnitt 6.1 wäre dies die Gitterweite. Wir wählen nun einen Ansatz für u

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i w_i$$

wobei $\{w_1, ..., w_N\}$ eine Basis von V_h ist. <u>Zu hart</u> wäre nun die Forderung

$$B[u_h, v] = f(v) \qquad \forall v \in V.$$

<u>Sinnvoll</u> ist dagegen

$$B[u_h, v_h] = f(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Dann stimmen nämlich die Dimensionen überein.

<u>Definition:</u> Die Aufgabe $u_h \in V_h$,

$$B[u_h, v_h] = f(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{6.2}$$

heißt das zu (6.1) gehörige *diskrete Problem*.

Wir kommen nun zur Umformung von (6.2). Wir verwenden dabei als *Testfunktionen* v_h die Basisfunktionen w_i von V_h

$$B[u_h, w_i] = f(w_i) \qquad \forall i = 1, .., N.$$

Jede Lösung dieses Systems ist offenbar auch Lösung von (6.2). Wir setzen nun unseren Ansatz für u_h ein

$$B[\sum_{j=1}^{N} u_j w_j, w_i] = f(w_i) \qquad \forall i = 1, .., N,$$

woraus

$$\sum_{j=1}^{N} u_j B[w_j, w_i] = f(w_i) \qquad \forall i = 1, .., N$$

folgt. Wir setzen nun

$$a_{ij} = B[w_j, w_i], \qquad f_i = f(w_i)$$

und erhalten

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j = f_i \qquad \forall i = 1, .., N.$$

In Matrixschreibweise sieht das einfacher aus

$$A_h \underline{u} = \underline{f},$$

wobei A die Matrix mit den Elementen a_{ij} ist und $\underline{u}$ bzw. $\underline{f}$ die Vektoren mit Elementen u_i bzw. f_i sind. Wir haben damit die Aufgabe auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems reduziert.

Anwendung der Methode

- Ansatzraum V_h wählen
- System $A_h \underline{u} = \underline{f}$ aufstellen, d.h. A_h und $\underline{f}$ berechnen.
- System lösen ... $u_h(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} u_i w_i(x)$

Anwendung auf die erste Randwertaufgabe im Einheitsquadrat

Wir verwenden die eingeführten "Hütchenfunktionen" $\varphi_{\nu\mu}$. Außerdem gilt

$$B[u, v] = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, dxdy = \int_\Omega \{u_x v_x + u_y v_y\}\, dxdy$$

Damit gilt für die Basisfunktionen

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = \int_\Omega \{\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y}\}\, dxdy.$$

Klar ist

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = 0 \qquad \text{falls } \Omega_{\nu\mu} \cap \Omega_{kl} = \emptyset.$$

Aber es gibt ja noch viele andere Fälle. Die beiden Gebiete können identisch sein oder sich teilweise überschneiden. Wir erhalten:

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\,dxdy = \begin{cases} 2 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu \\ -1 & k=\nu+1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu+1 \quad l=\mu+1 \\ 0 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu+1 \\ -1 & k=\nu-1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu-1 \quad l=\mu-1 \\ 0 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu-1 \end{cases}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial y}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y}\,dxdy = \begin{cases} 2 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu \\ 0 & k=\nu+1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu+1 \quad l=\mu+1 \\ -1 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu+1 \\ 0 & k=\nu-1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu-1 \quad l=\mu-1 \\ -1 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu-1 \end{cases}$$

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = \begin{cases} 4 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu \\ -1 & k=\nu+1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu+1 \quad l=\mu+1 \\ -1 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu+1 \\ -1 & k=\nu-1 \quad l=\mu \\ 0 & k=\nu-1 \quad l=\mu-1 \\ -1 & k=\nu \quad\quad\; l=\mu-1 \end{cases}$$

Wir rechnen hier als Beispiel vor: $k=\nu$, $l=\mu$

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\,dxdy = \sum_{i=1}^{6}\int_{K_i} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\,dxdy.$$

In den Dreiecken K_1 und K_4 galt $\dfrac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = 0$. In den anderen Dreiecken war jeweils $\dfrac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = \pm\dfrac{1}{h}$. Also ergibt sich insgesamt

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\,dxdy = \sum_{2,3,5,6}\int_{K_i} \frac{1}{h^2}\,dxdy = 4\cdot\frac{1}{h^2}\cdot\frac{h^2}{2} = 2.$$

Nehmen wir noch den Fall: $k = \nu + 1$, $l = \mu$.

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy = \int_{K_2} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy + \int_{K_3} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy$$

Hier gilt

$$\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = -\frac{1}{h}, \qquad \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} = \frac{1}{h},$$

also

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}\, dxdy = 2 \cdot (-\frac{1}{h^2}) \cdot \frac{h^2}{2} = -1.$$

Analog rechnet man in den anderen Fällen.

<u>Wir kommen nun zu einem wichtigen Problem:</u>

Um die Matrix A_h aufstellen zu können, müssen wir die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}$ durchnummerieren von 1 bis $(M-1)^2$. Je nachdem, wie wir dies tun, wird die Matrix A_h eine mehr oder weniger komplizierte Gestalt haben.Um diese Dinge in den Griff zu bekommen, muss man aber etwas mehr Aufwand treiben.

<u>Stark vereinfachtes Beispiel:</u>

Wir vernetzen Ω so grob, dass ein direktes Durchrechnen ohne weitere Kenntnisse gerade noch möglich ist. Dazu verwenden wir 4 innere Knoten und haben also 4 Basisfunktionen:

$$w_1 = \varphi_{11},\ w_2 = \varphi_{21},\ w_3 = \varphi_{22},\ w_4 = \varphi_{12}$$

Zu berechnen haben wir die Matrix A_h. Die Formeln dazu haben wir schon bereit gestellt. Demnach stehen auf der Hauptdiagonalen lauter Vieren. Bei den Elmenten a_{14} und a_{22} haben wir den Fall $k = \nu$, $l = \mu + 1$. Laut unserer Tabelle ergibt sich der Wert -1. a_{24} ist Null, da der gemeinsame Träger die leere Menge ist. a_{13} ist der Fall $k = \nu + 1$, $l = \mu + 1$. Hier ergibt sich ebenfalls der Wert Null. Bleibt noch a_{12} und a_{34}. Diese stellen die Fälle $k = \nu + 1$, $l = \mu$ und $k = \nu - 1$, $l = \mu$ dar. Beide liefern den Wert -1. Zusammengefasst erhalten wir

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Gegeben sei außerdem die rechte Seite $f \equiv 1$ in Ω. Wir müssen noch die Elemente f_i des Vektors $\underline{f}$ berechnen:

$$f_i = \int_\Omega f(x,y)w_i(x,y)\,dxdy = \int_\Omega w_i(x,y)\,dxdy$$

Dieser Ausdruck ist aber gerade das Volumen des Hütchens. Die Grundfläche besteht aus 6 Dreiecken mit Flächeninhalt $h^2/2$. Die Höhe der Pyramide ist 1. Nach der Formel $V_p = \frac{1}{3}\cdot$Grundfläche erhalten wir

$$f_i = V_p = 6 \cdot \frac{h^2}{6} = h^2.$$

und damit das folgende Gleichungssystem für $\underline{u}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In unserem Fall ist $h = 1/3$, also steht rechts im Vektor immer $1/9$. Offenbar muss die Lösung total symmetrisch sein. Man erhält also die Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1/18$ und damit das Ergebnis

$$u_h(x,y) = \frac{1}{18}(w_1(x,y) + w_2(x,y) + w_3(x,y) + w_4(x,y)).$$

In der Übung werden wir noch auf das Lemma von Céa eingehen.