

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung - Definition und Beispiele	5
1.1	Grundbegriffe	5
1.2	Die Wärmeleitgleichung	10
1.3	Die Schwingungsgleichung	12
1.4	Die Laplace-Gleichung	14
2	Klassifikation und Charakteristiken	17
2.1	Koordinatentransformation	17
2.2	Klassifikation	24
2.3	Charakteristikenmethode	26
2.4	Cauchyproblem	29
2.5	Transformation auf Normalform	36
3	Einige elementare Lösungsmethoden	41
3.1	Schwingungsgleichung	41
3.1.1	Anfangs- und Randbedingungen	41
3.1.2	Die d' Alembertsche Methode	42

3.1.3	Die Spiegelungsmethode für die Halbgerade	44
3.1.4	Trennung der Veränderlichen - Fouriermethode	45
3.2	Wärmeleitgleichung	52
3.2.1	Anfangs- und Randbedingungen	52
3.2.2	Fouriermethode für die eindimensionale Wärmeleitgleichung	54
3.3	Laplace-Gleichung	58
3.3.1	Randwertaufgaben für die Laplace-Gleichung	58
3.3.2	Lösung des Dirchletproblems für einen Kreis	59
4	Klassische Theorie	65
4.1	Die Laplace-Gleichung	65
4.2	Poisson-Gleichung	67
4.3	Mittelwertsatz und Maximumprinzip	71
4.4	Die Greensche Funktion	76
5	Schwache Lösungen	83
5.1	Distributionen	83
5.1.1	Motivation	83
5.1.2	Begriff der Distribution	84
5.1.3	Ableitungen von Distributionen	86
5.2	Schwache Ableitungen - Sobolevräume	89
5.3	Reguläre Gebiete	91
5.4	Spursätze	93

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
5.5 Theorie der schwachen Lösungen	98
5.5.1 Begriff der schwachen Lösung	98
5.5.2 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	102
5.5.3 Eigenwerte	104
5.5.4 Andere Randbedingungen	107
5.5.5 Erweiterungen	113
6 Die Finite-Elemente-Methode (FEM)	115
6.1 Approximation durch Basisfunktionen	115
6.2 Grundzüge der FEM	118
7 Parabolische Differentialgleichungen	123
7.1 Maximumprinzip	123
7.2 Das Cauchyproblem	125
7.3 Das Cauchyproblem für höhere Ortsdimension	129
7.4 Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$	129
7.5 Schwache Lösungen in $W(0, T)$	132
7.5.1 Abstrakte Funktionen	132
7.5.2 Abstrakte Funktionen und Wärmeleitung	134
7.5.3 Vektorwertige Distributionen	135
7.5.4 Zugehörigkeit schwacher Lösungen zu $W(0, T)$	137
8 Die mehrdimensionale Wellengleichung	141
8.1 Kirchhoffsche und Poissonsche Formel	141
8.2 Die inhomogene Wellengleichung	146
8.3 Eindeutigkeitsfragen	148

Kapitel 1

Einführung - Definition und Beispiele partieller Differentialgleichungen

1.1 Grundbegriffe

Wir wiederholen zunächst den Begriff einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*. Gesucht wird hier eine Funktion $u = u(x)$ einer reellen Veränderlichen $x \in (a, b)$, so dass die Gleichung

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$$

erfüllt ist. Sie wird *gewöhnlich Differentialgleichung m-ter Ordnung* genannt, wenn $m \geq 1$ gilt und $u^{(m)}$ wirklich auftritt, also die Gleichung nach $u^{(m)}$ umgestellt werden kann. Gegeben ist eine Funktion $F = F(x, y_0, \dots, y_m) : (a, b) \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie das Gebiet $G = (a, b)$, in welchem der betrachtete Vorgang abläuft.

Durch die Differentialgleichung selbst ist die Lösung u nicht eindeutig bestimmt, deshalb braucht man zusätzliche Bedingungen, etwa *Anfangs- und Randbedingungen*.

Beispiel

$$u'(x) = u^2, \quad x > 0$$

$$u(0) = 1$$

Mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhält man die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Dieses so harmlos aussehende Beispiel zeigt, dass die Existenz von Lösungen nicht trivial und gegebenenfalls nur lokal gesichert ist. Hier hat u eine Singularität bei $x = 1$ ("blow up in finite time"). Im Beispiel war $F = F(x, y_0, y_1) = y_1 - y_0^2$, $G = (0, \infty)$.

Bei *partiellen* Differentialgleichungen ist eine Funktion u von *mehreren Veränderlichen* gesucht,

$$u = u(x_1, \dots, x_n), \quad u : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad G \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Variablen x_1, \dots, x_n fassen wir zu einem Vektor x zusammen, $x \in G$. Anstelle der Ableitungen $u', \dots, u^{(m)}$ treten nun partielle Ableitungen auf, z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}$$

usw. Offensichtlich steigt damit der Schreibaufwand, und wir benötigen eine elegante Notation.

Definition: (Verwendung von Multiindizes)

$$D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} D_j u &= \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ D_j^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ D_i D_j u &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Multiindex: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Bedeutung: α_i gibt an, wie oft nach x_i partiell abgeleitet wird.

Betrag von α : $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
entspricht der Differentiationsordnung

Differentialoperator D_x^α : das x steht hier für die Differentiation nach x

$D_x^\alpha = (D_1^{\alpha_1}, \dots, D_n^{\alpha_n})$ der letzte Eintrag bedeutet z.B., dass α_n -mal nach x_n abgeleitet wird.

Beispiel: $u = u(x_1, \dots, x_5)$, $n = 5$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} = D_1 D_2^2 u = D_x^\alpha u$$

mit $\alpha = (1, 2, 0, 0, 0)$ und $|\alpha| = 3$.

Nun können wir den Begriff der partiellen Differentialgleichung einführen. Dazu brauchen wir ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $F : G \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F = F(x, y_0, y_1, \dots, y_k).$$

Definition: Eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), D_x^{\alpha^1} u(x), \dots, D_x^{\alpha^k} u(x)) = 0, \quad x \in G,$$

heißt *partielle Differentialgleichung in n reellen Veränderlichen*. Dabei sind $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ Multiindizes, also jeweils Vektoren der Dimension n . Gilt $|\alpha^i| \leq m$, $i = 1..k$, und existiert ein α^j mit $|\alpha^j| = m$, so heißt die Gleichung von m -ter Ordnung. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass nach $D_x^{\alpha^j} u$ umgestellt werden kann, diese Ableitung also wirklich auftritt.

Beispiel: $n = 2$, $u = u(x_1, x_2)$

Wir schreiben vorteilhafter $x := x_1$, $y := x_2$.

$$x(D_x u)^2 + D_x D_y^2 u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$$

ist eine partielle Differentialgleichung im Einheitskreis.

$$G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$F = xy_1^2 + y_2 \quad \alpha_1 = (1, 0), \quad \alpha_2 = (1, 2)$$

Ordnung: $m = 3$

Analog gibt es Systeme von partiellen Differentialgleichungen. In diesem Fall sind F und u Vektoren, $F : G \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^M$, $u : G \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Definition: (linear/semilinear/quasilinear/nichtlinear)

1. Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f(x)$$

mit gegebenen Funktionen a_α und f heißt *linear*.

2. Hat eine partielle Differentialgleichung die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u + \tilde{F}(x, D_x^{\alpha^1} u, \dots, D_x^{\alpha^l} u) = 0,$$

wobei alle in \tilde{F} stehenden Ableitungen die Ordnung kleiner als k besitzen, so heißt sie *semilinear*. ("Hauptteil ist linear.")

3. Hat sie die Gestalt

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, D_x^{\beta^1} u, \dots, D_x^{\beta^p} u) D_x^\alpha u + \tilde{F}(x, D_x^{\alpha^1} u, \dots, D_x^{\alpha^l} u) = 0,$$

wobei $|\alpha^1|, \dots, |\alpha^l|, |\beta^1|, \dots, |\beta^p| \leq k - 1$ gilt, so heißt sie *quasilinear* (höchste Ableitungen kommen nur linear vor).

4. Trifft keiner der vorigen Fälle zu, so heißt die PDE *nichtlinear*.

Vereinfachung der Schreibweise: $D^\alpha := D_x^\alpha$

PDE steht für partielle Differentialgleichung (partial differential equation).

Beispiele: 1. $\nabla u(x) = f(x)$ $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben

Lineares System 1. Ordnung, ausgeschrieben

$$\begin{aligned} D_1 u &= f_1 \\ &\dots = \dots \\ D_n u &= f_n \end{aligned}$$

2. $x_1^3 D_2 D_3 u + D_1 u = 0$

Homogene lineare PDE 2. Ordnung. Anders aufgeschrieben:

$$a_\alpha D^\alpha u + D^\beta u = 0$$

mit $\alpha = (0, 1, 1)$, $a_\alpha = x_1^3$, $\beta = (1, 0, 0)$.

3. $x_1^3 D_2 D_3 u + (D_1 u)^2 = 0$

Semilineare PDE 2. Ordnung

4. $x_1^3 (D_2 D_3 u)(D_1 u)^2 = 0$

Quasilineare PDE 2. Ordnung

5. $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = 0$

Nichtlineare PDE 1. Ordnung

Um nicht in Formalitäten zu ersticken, wollen wir einige einfache Beispiele lösen bzw. diskutieren.

6. $u = u(x, y)$

Gegeben sei die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, kurz

$$u_x(x, y) = 0,$$

womit wir noch eine alternative Bezeichnungsweise für partielle Differentialgleichungen ins Spiel gebracht haben ...

Lösung: Alle Funktionen der Form $u = u(y)$.

7. $u = u(x, y)$

Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, kurz

$$u_{xy}(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

Lösung: Wir formulieren um zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) = 0$$

und setzen $v := \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. Für v ergibt sich

$$v_x(x, y) = 0,$$

also nach 6. die Zwischenlösung $v = v(y)$. Somit folgt

$$u_y(x, y) = v(y)$$

und daraus

$$u(x, y) = \int v(y) dy = f(y) + c$$

Wir müssen beachten, dass c von x abhängen darf. Also erhalten wir die Lösung

$$u(x, y) = g(x) + f(y) \tag{1.2}$$

Jede Funktion dieser Bauart mit differenzierbaren Funktionen g und f löst unsere Gleichung.

8. $u = u(x, y)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Aus $(\nabla u, \nabla u) = 0$ folgt $\nabla u = 0$ also $u(x, y) \equiv c$.

Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind durch die Gleichung immer bis auf Konstanten bestimmt. Diese müssen dann durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. In den Beispielen 6. und 7. haben wir gesehen, dass Lösungen partieller Differentialgleichungen noch frei wählbare Funktionen beinhalten. Aber auch diese können bei geeigneten Anfangs- oder Randbedingungen ermittelt werden.

1.2 Die Wärmeleitgleichung

Diese Gleichung beschreibt die Wärmeausbreitung in Körpern, modelliert aber auch die Diffusion von Substanzen in gegebenen Bereichen. Sie wird deshalb oft auch als *Diffusionsgleichung* bezeichnet.

Das betrachtete *Ortsgebiet* sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Außerdem spielt die *Zeit* $t \geq 0$ noch eine Rolle. Gesucht ist

$$u = u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t),$$

die Temperatur im Ortspunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t .

Physikalische Grundlage für die Wärmeausbreitung in Ω ist das *Fouriersche Gesetz*. Wir betrachten hier die Änderung der inneren Energie $Q_2 - Q_1$. Diese Änderung ist gleich dem Wärmefluß über die Oberfläche S in dieser Zeit. Daher gilt

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \nabla u \cdot d\vec{S} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Dabei ist ν die Normale auf S . Der Wärmestrom ist also proportional zum Temperaturgradienten. Diese Formel gilt für *isotrope* Körper. Das bedeutet, dass die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Ortsrichtung ist. Die Größe $k = k(x)$ heißt Wärmeleitzahl.

Herleitung der Wärmeleitgleichung

Wir betrachten ein kleines Teilgebiet $D \subset \Omega$ im Zeitraum $[t_1, t_2]$. Dazu verwenden wir die Größen:

$c = c(x)$ spezifische Wärme

$\varrho = \varrho(x)$ Dichte

ν äußere Normale an $S = \partial D$

Zunächst gilt für die innere Energie die Formel

$$Q(t) = \int_D c \varrho u(x, t) dx$$

und daher ergibt sich

$$\int_D c \varrho (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Wir nehmen an, daß die Anwendung des Gaußschen Integralsatz erlaubt ist und wenden diesen für das Vektorfeld $k \nabla u$ an

$$\int_D c \varrho (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \operatorname{div} (k \nabla u) dx dt.$$

Äquivalent dazu ist die Formulierung

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \operatorname{div} (k \nabla u) dx dt,$$

woraus wir auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D (c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k \nabla u)) dx dt = 0$$

schließen. Aus der Beliebigkeit von t_1 , t_2 und D folgt

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u) \quad t > 0, x \in \Omega$$

die *Wärmeleitgleichung*. Ausgeschrieben:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Ist Ω homogen, d.h. c , ρ , k sind von x unabhängig, dann gilt

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \quad (\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}).$$

Wir transformieren $t = \frac{c\rho}{k} t'$ und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \Delta u$$

als Grundform der Wärmeleitgleichung. Bei der Diffusionsgleichung steht u für die Konzentration und k für den Diffusionskoeffizient.

1.3 Die Schwingungsgleichung

Mit der Schwingungsgleichung werden Schwingungen von gewissen Medien bzw. die Ausbreitung von Wellen beschrieben, daher auch der Name "Wellengleichung". Wir leiten die Gleichung für den Fall einer in der vertikalen Ebene schwingenden Saite her (Gitarre als Hintergrund).

Saite: "Elastisch gespannter Faden, der Biegungen keinen Widerstand entgegensetzt."

Wir stellen uns einen Schnappschuss der Saite vor

- Saite eingespannt zwischen $x = 0$ und $x = l$
- Ortspunkt $x \in [0, l]$

- Zeit $t \geq 0$
- $u(x, t)$: Auslenkung der Saite im Punkt x zur Zeit t

Herleitung der Schwingungsgleichung

Vereinfachende Näherung: Größen höherer Ordnung von $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, wie zum Beispiel $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, werden vernachlässigt. Wegen fehlendem Biege-*widerstand* wirkt die Kraft auf jeden Punkt der Saite immer *tangential*. Wir betrachten nun die Situation für ein kleines Saitenstück der Länge dx . Die Länge des ausgelenkten Stücks beträgt nach unserer Näherungsannahme

$$l = \int_x^{x+dx} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \int_x^{x+dx} dx = dx.$$

Aus dem Hookeschen Gesetz kann man ableiten:

$$|T(x, t)| \equiv T_0.$$

Wir denken uns nun die auf das Saitenstück vertikal wirkende Kraft in einem Punkt konzentriert und erhalten nach dem 2. Newtonschen Gesetz ($F = m \cdot a$)

$$T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 + F(x, t)dx = \varrho(x)dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Dabei sind ϱ die Massendichte und F die Kraftdichte äußerer vertikal angreifender Kräfte. In die Massenberechnung ging bereits die Formel $l \approx dx$ ein. Aus unserer Näherungsannahme folgt

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

woraus wir auf

$$\varrho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{dx} \left(\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F$$

schließen. Wir nehmen nun u hinreichend glatt an und folgern aus dem Mittelwertsatz

$$\varrho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x + \vartheta dx, t)dx + F.$$

Der Grenzübergang $dx \rightarrow 0$ ergibt

$$\varrho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Ist ϱ konstant, so erhalten wir mit $a = \sqrt{T_0/\varrho}$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

die (örtlich) *eindimensionale Schwingungsgleichung*. Analog stellt man die Gleichung in höheren Ortsdimensionen auf:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

Die *zweidimensionale Schwingungsgleichung* beschreibt das Schwingungsverhalten einer Membran. Die *dreidimensionale Schwingungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f$$

beschreibt Phänomene wie Schallausbreitung und elektromagnetische Wellen. Alle Dimensionen können einheitlich durch

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$$

berücksichtigt werden, wobei wie bei der Wärmeleitgleichung der Laplace-Operator Δ nur in Ortsrichtung wirkt. In sehr vielen praktischen Anwendungen kann der Term f der äußeren Kräfte vernachlässigt werden.

1.4 Die Laplace-Gleichung

Betrachten wir als Beispiel eine Kugel, die fest im All schwebt und permanent auf einer Seite durch die Sonne beschienen wird. Für $t \rightarrow \infty$ stellt sich ein stationärer Temperaturzustand $u = u(x)$ ein, der nicht mehr von t abhängt. Die Wärmeleitgleichung geht über in die

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Laplace-Gleichung. Dies ist eine homogene Gleichung. Bauen wir eine inhomogene rechte Seite f ein, so entsteht die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Interpretiert man die rechte Seite als Ladungsverteilung, so beschreibt die Poisson-Gleichung das zugehörige elektrische Feld.

Wärmeleitgleichung, Schwingungsgleichung, Laplace- und Poisson-Gleichung sind lineare PDEs zweiter Ordnung. Vom Typ her sind sie gänzlich verschieden, nämlich parabolisch, hyperbolisch bzw. elliptisch (die letzten beiden) und haben entsprechend verschiedenes Lösungsverhalten. Wie man auf die Typeinteilung kommt, das verrät das nächste Kapitel.

Kapitel 2

Klassifikation und Charakteristiken

2.1 Koordinatentransformation

Wir untersuchen hier partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearem Hauptteil

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j u + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \quad (2.1)$$

Gegeben sind n^2 stetige Funktionen $a_{ij} : G \rightarrow \mathbb{R}$ sowie die Funktion Φ , die uns hier nicht weiter interessiert. Wir dürfen Symmetrie annehmen, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, denn ansonsten symmetrisieren wir durch

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

und erhalten den selben Wert des Hauptteils, weil für $u \in C^2(G)$ der Satz von Schwarz gilt.

Wir fassen die a_{ij} zu einer Matrix A zusammen

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

und können A als symmetrisch voraussetzen.

Beispiele 1. Laplace-Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wärmeleitgleichung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \Phi = -u_t$$

t entspricht hier x_4 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Wellengleichung

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Tricomi-Gleichung

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Burgers-Gleichung

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Phi = -u_t + u \cdot u_x$$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oft ist es nicht sinnvoll, in den gegebenen kartesischen Koordinaten zu rechnen, sondern man zieht andere Koordinaten vor, je nach Beschaffenheit des Gebietes G . Dann muss man die PDE transformieren.

Gegeben sei die *Koordinatentransformation*

$$y = F(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Beachte: $F : x \mapsto y$, also $F^{-1} : y \mapsto x$.

Beispiel Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Keiner verwendet hier die obige Schreibweise. Wir haben

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix},$$

somit ist F^{-1} gegeben.

Frage: Wie sieht der Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

in den neuen Koordinaten aus? Diese Koordinatentransformation ist mit viel Rechnen und mehr oder weniger großer Wahrscheinlichkeit des Verrechnens verbunden. Wir diskutieren zuerst die einfachste *direkte Methode* für den Fall der Polarkoordinaten und behandeln den allgemeinen Fall eleganter.

$$u(x, y) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = v(r, \varphi)$$

Wir berechnen zunächst $v_r = \frac{\partial v}{\partial r}$ und $v_\varphi = \frac{\partial v}{\partial \varphi}$ für die neue Funktion v :

$$v_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$$

$$v_\varphi = u_x \cdot x_\varphi + u_y \cdot y_\varphi = u_x(-r \sin \varphi) + u_y r \cos \varphi$$

Wir lesen das als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von u_x , u_y und lösen auf. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} u_x &= v_r \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} v_\varphi \\ u_y &= v_r \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} v_\varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Auf diese Weise haben wir u_x , u_y durch r und φ dargestellt. Um u_{xx} darzustellen, betrachten wir die rechte Seite der oberen Gleichung von (2.3) als neue Funktion $\tilde{v}(r, \varphi)$ und wenden die eben durchgeführte Prozedur zur Bestimmung von u_{xx} an:

$$u_{xx} = (u_x)_x = \tilde{v}_r \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \tilde{v}_\varphi$$

Nun heißt es also \tilde{v}_r und \tilde{v}_φ ausrechnen, Gleiches für u_{yy} auszuführen und dann $u_{xx} + u_{yy}$ zu berechnen. Man erhält bei korrekter Berechnung

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} v_r = \frac{1}{r} (r v_r)_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

Somit ergibt sich der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten in der Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Umrechnung im allgemeinen Fall

Wir transformieren jetzt den *Hauptteil* von (2.1) gemäß der Transformation $y = F(x)$.

$$u(x) = u(F^{-1}(y)) = v(y)$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i}$$

nach dem Satz über das totale Differential. Völlig analog noch einmal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial y_l} \right) \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \\
&= \sum_{l=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \\
&= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

Nun wird es wirklich unübersichtlich, so sieht es schöner aus

$$D_i D_j u = \sum_{k,l=1}^n D_i y_l D_j y_k D_l D_k v + \sum_{l=1}^n D_i D_j y_l D_l v.$$

Wir setzen das in den Hauptteil von (2.1) ein

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j u = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i y_l D_j y_k \right) D_l D_k v + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i D_j y_l \right) D_l v.$$

Die erste Klammer beschreibt die Koeffizienten des neuen Hauptteils. Die zweite Summe enthält nur Terme niedrigerer Ordnung.

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{lk}(y) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} a_{ij} \\
b_l &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Die nichtlinearen Terme $\Phi(x, u, \nabla u)$ transformiert man zu $\tilde{\Phi}(y, v, \nabla v)$.

Bemerkung: In (2.4) steckt noch ein Stolperstein. Die Ausdrücke rechts hängen alle von x ab und müssen geschickt durch y ausgedrückt werden.

Außerdem ist die Beziehung (2.4) noch recht unhandlich. Wir setzen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

und können leicht nachrechnen, dass die obere Gleichung von (2.4) äquivalent ist mit

$$\tilde{A} = F'(x)AF'(x)^T,$$

wobei F' die Jacobi-Matrix von F ist

$$F' = \begin{pmatrix} D_1y_1 & \dots & D_ny_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_ny_1 & \dots & D_ny_n \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatentransformation kann so mit folgendem Schema ausgeführt werden:

1. F' aufstellen
2. \tilde{A} und b berechnen
3. Wenn noch nötig, x durch y ausdrücken

Spezialfall: Transformation des Laplaceoperators

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= F'(x)F'(x)^T. \\ b_l &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i^2} = \Delta y_l \end{aligned}$$

Wir halten fest

$$b_l = \Delta y_l \quad l = 1, \dots, n.$$

Beispiel Laplaceoperator in Polarkoordinaten - Zweite Methode

Wir wenden die gebräuchlichen Bezeichnungen an, d.h. x_1, x_2, y_1, y_2 heißen jetzt wieder x, y, r und φ .

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Aus G' könnten wir F' mittels $F' = (G')^{-1}$ berechnen.

$$G' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Wir benutzen dazu die Invertierungsformel für 2×2 -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

det $G' = r$ und erhalten

$$F' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$\tilde{A} = F' A (F')^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Das ist aber noch nicht alles, wir brauchen noch b_1 und b_2 . Wir wissen schon, dass für den Laplace-Operator $b_1 = \Delta r$ und $b_2 = \Delta \varphi$ gilt. Wir benötigen also Ableitungen von r und φ nach x und y . Diese Ableitungen finden wir im Jacobian F' .

$$r_{xx} = (r_x)_x = (\cos \varphi)_x = -\sin \varphi \cdot \varphi_x = \frac{1}{r} \sin^2 \varphi$$

$$r_{yy} = (r_y)_y = (\sin \varphi)_y = \cos \varphi \cdot \varphi_y = \frac{1}{r} \cos^2 \varphi$$

Somit gilt $\Delta r = \frac{1}{r}$. Aus

$$\varphi_{xx} = \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi\right)_x = \frac{1}{r^2} \sin \varphi \cdot r_x - \frac{1}{r} \cos \varphi \cdot \varphi_x = \frac{2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi$$

und

$$\varphi_{yy} = \left(\frac{1}{r} \cos \varphi\right)_y = -\frac{1}{r^2} \cos \varphi \cdot r_y - \frac{1}{r} \sin \varphi \cdot \varphi_y = -\frac{2}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi$$

folgt $\Delta\varphi = 0$.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

Wir erhalten also wieder

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Beispiel: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Die Herleitung der Formel erfolgt in der Übung. Wir geben hier nur das Ergebnis an.

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Beispiel: Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.2 Klassifikation linearer PDEs 2.Ordnung

Gegeben ist die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad (2.5)$$

wobei wir wieder $A = (a_{ij})$ setzen. A wird wieder als symmetrisch vorausgesetzt und besitzt daher nur *reelle* Eigenwerte.

Definition: (elliptisch/hyperbolisch/parabolisch)

Die Gleichung (2.5) heißt in x

- *elliptisch*, wenn alle Eigenwerte von $A(x)$ positiv oder negativ sind, d.h. wenn $A(x)$ positiv oder negativ definit ist,
- *hyperbolisch*, wenn ein Eigenwert von $A(x)$ positiv und die anderen negativ sind oder ein Eigenwert negativ und die anderen positiv sind,
- *parabolisch*, wenn mindestens ein Eigenwert 0 ist.

In allen anderen Fällen wird die PDE häufig als ultrahyperbolisch bezeichnet.

Bemerkungen:

- Der Typ von (2.5) kann durchaus von x abhängen (siehe Tricomi-Gleichung).
- Im Fall $n = 2$ kann die Typbestimmung mit Hilfe der Determinante von A erfolgen: Aus $\det A(x) > 0$ folgt, dass die Gleichung elliptisch ist, $\det A(x) < 0$ impliziert, dass (2.5) hyperbolisch ist, und bei $\det A(x) = 0$ ist die Gleichung parabolisch.

Beispiele:

1. Laplace-Gleichung

$A = I$ und besitzt daher den n -fachen Eigenwert 1. Die Gleichung ist somit *elliptisch*.

2. Wärmeleitgleichung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Eigenwerte sind 1 und der vierte ist 0. Die Gleichung ist daher *parabolisch*.

3. Wellengleichung (3D)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Eigenwerte sind 1 und der vierte ist -1 . Die Gleichung ist somit *hyperbolisch*.

4. Tricomi-Gleichung

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix besitzt die Eigenwerte y und 1. Der Typ ist daher

$$y \begin{cases} > 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ < 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases}$$

Man sollte schon vor dem (numerischen) Rechnen wissen, von welchem Typ die Gleichung ist. Dies beeinflusst oft den Erfolg oder Mißerfolg einer numerischen Methode.

Bemerkung: Alle Beispiele 1.-4. lagen in Normalform vor, d.h. ohne gemischte partielle Ableitungen. Die Matrizen hatten Diagonalgestalt und wir konnten die Eigenwerte einfach auf der Hauptdiagonalen ablesen.

2.3 Die Charakteristikenmethode für quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Vorgegeben ist die Gleichung

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (2.6)$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, also eine quasilineare PDE erster Ordnung. Wir werden die sogenannte *Charakteristikenmethode* geometrisch herleiten, ohne sie allerdings exakt zu begründen. Dazu verweisen wir auf SMIRNOV, Band IV. Wir erhalten auf diese Weise eine erste Vorstellung vom Begriff der Charakteristik.

Zunächst formulieren wir (2.6) um zu

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Bekanntlich ist der Vektor $(u_x, u_y, -1)^T$ Normalenvektor zur Fläche $u = u(x, y)$. Folglich liegt der Vektor $(a, b, c)^T$ jeweils in der Tangentialebene zum Punkt $(x, y, u(x, y))$.

Während die Fläche $u = u(x, y)$ unbekannt und gesucht ist, kennen wir den Vektor (a, b, c) in jedem Raumpunkt $(x, y, u) \in \mathbb{R}^3$. Somit definiert (a, b, c) ein Vektorfeld, und wir können dessen Feldlinien bestimmen. Dies sind Kurven

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{pmatrix},$$

dessen Tangentialvektoren an der Stelle $(x(s), y(s), u(s))$ parallel zur Richtung $(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ sind. Daraus leiten wir die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s), y(s), u(s)) \\ y'(s) &= b(x(s), y(s), u(s)) \\ u'(s) &= c(x(s), y(s), u(s)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die Lösungen bezeichnet man als *Charakteristiken* oder *charakteristische Kurven*. Diese Kurven füllen das gesamte Raumgebiet aus. Wir wollen aber mit ihnen eine Fläche $u = u(x, y)$ aufspannen. Es liegt auf der Hand, dass zur Fixierung einer Lösung von (2.6) weitere Daten benötigt werden.

Dazu geben wir eine passend gewählte stückweise glatte Kurve \mathcal{L} in \mathbb{R}^3 vor und verlangen, dass die gesuchte Fläche u durch \mathcal{L} geht. Jetzt lässt sich diese Fläche leicht konstruieren. Wir betrachten all jene Feldlinien, die \mathcal{L} schneiden. Ist \mathcal{L} nicht gerade ungeschickt gewählt, dann spannen diese Feldlinien eine Fläche auf.

Nach Konstruktion definiert die Fläche eine Lösung u von (2.6), denn überall ist $(u_x, u_y, -1)^T$ senkrecht zur Fläche. Es sei Γ die Projektion von \mathcal{L} auf die $x - y$ -Ebene. Dann haben wir geometrisch folgendes Problem gelöst:

Gesucht ist eine Lösung u von (2.6), stückweise glatt, so dass $u(x, y) \in \mathcal{L}$ für alle $x, y \in \Gamma$.

Definition: Das eben definierte Problem heißt *Cauchyproblem* für (2.6).

Wir wollen nicht genauer auf die Fragen von Existenz und Eindeutigkeit von u eingehen und verweisen dazu auf SMIRNOV, Band IV Nr. 99–102. Eines

ist aber geometrisch klar - gibt man \mathcal{L} ungeschickt vor, dann sind Existenz und Eindeutigkeit nicht gesichert.

Schlechte Wahl: \mathcal{L} ist selbst charakteristisch.

Beispiel: $3(u - y)^2 u_x - u_y = 0$.

$$\mathcal{L} = \{(x, y, u) \mid x = 0, y = t, u = t, t \in \mathbb{R}\}$$

t ist der Parameter für \mathcal{L} und s der für die Charakteristiken. Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'(s) &= 3(u(s) - y(s))^2 \\ y'(s) &= -1 \\ u'(s) &= 0 \end{aligned}$$

Der Anfangswert

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

ist unbekannt und später festzulegen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(s) &\equiv u_0 \\ y(s) &= -s + y_0 \\ x'(s) &= 3(u_0 + s - y_0)^2 \\ x(s) &= (u_0 + s - y_0)^3 + c. \end{aligned}$$

Für $s = 0$ gilt $x_0 = (u_0 - y_0)^3 + c$, also $c = x_0 - (u_0 - y_0)^3$. Um die richtigen Feldlinien auszusondern, lassen wir (x_0, y_0, u_0) entlang \mathcal{L} laufen:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = u_0 = t$$

Somit gilt

$$u(s) = t, \quad y(s) = t - s, \quad x(s) = s^3.$$

Nun bleibt noch u in der Form $u = u(x, y)$ darzustellen. Sei (x, y) gegeben. Dann folgt $s = x^{1/3}$ und daraus

$$t = y + s = x^{1/3} + y, \quad u = t = x^{1/3} + y.$$

Sie prüfen nach, dass $u = x^{1/3} + y$ wirklich Lösung ist.

Bemerkungen:

1. u ist nicht stetig partiell differenzierbar bei $x = 0$.
2. Allgemein ergibt die Methode

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t).$$

Zur Darstellung $u = u(x, y)$ muss (s, t) nach (x, y) auflösbar sein. Deshalb wird vorausgesetzt (Satz über implizite Funktionen)

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} \neq 0.$$

Im Beispiel erhält man als Determinante $3s^2$. Trotzdem hat es funktioniert.

3. Analog behandelt man Gleichungen höherer Ortsdimension,

$$a_1(x, u)D_1u + \dots + a_n(x, u)D_nu = a_{n+1}(x, u)$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, siehe Smirnov, Band IV.

4. In einigen Fällen kann man den Parameter s schon bei der Lösung von (2.7) "herauswerfen". Dazu mehr in der Übung.

2.4 Cauchyproblem und charakteristische Gleichungen

Wir betrachten die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Dimension n :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \tilde{f}(x) \quad (2.8)$$

Für $n = 1$ reduziert sich (2.8) auf die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a_{11}(x)u''(x) + b_1(x)u'(x) + c(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Um die Lösung festzulegen (es sei $a_{11} \neq 0$), geben wir *Cauchydaten* in $x = x_0$ vor:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0 \\ u'(x_0) &= u_1. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe nennt sich *Cauchyproblem*. Wie kann man dies für (2.8) verallgemeinern ?

Cauchyproblem für (2.8): Gegeben sei im \mathbb{R}^m eine glatte $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit S :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) = 0\},$$

wobei $\nabla F(x) \neq 0 \forall x$ gelten soll. In jedem $x \in S$ sei eine Richtung $0 \neq l = l(x) \in \mathbb{R}^m$ definiert, die nicht tangential zu S ist.

Definition: (Cauchyproblem)

Gesucht ist eine Lösung $u = u(x)$ von (2.8) mit

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) & x \in S \\ \frac{\partial u}{\partial l}(x) &= u_1(x) & x \in S \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die auf S gegebenen Funktionen u_0, u_1 heißen *Cauchydaten*.
- $\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u, l)$ (Richtungsableitung)

Es zeigt sich, dass diese Aufgabe nur dann für beliebige Cauchydaten lösbar ist, wenn die Fläche S nicht falsch - nämlich nicht charakteristisch - gewählt ist. Um dies zu verdeutlichen, wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen

- $n = 2$
- S ist eine Gerade im \mathbb{R}^2
- $b = c(x) = \tilde{f} = 0$

- l ist konstant $\neq 0$ und $l \notin S$

Wir können also S beschreiben in der Form:

$$S : (f, x) = c \quad \text{mit } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Außerdem gilt

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad (f, l) \neq 0.$$

Für F ergibt sich $F(x_1, x_2) = (f, x) - c = f_1 x_1 + f_2 x_2 - c = 0$. Als *Cauchyproblem* erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0 \\ u(x_1, x_2) &= u_0(x_1, x_2) \quad \text{auf } S \\ \frac{\partial u}{\partial l}(x_1, x_2) &= u_1(x_1, x_2) \quad \text{auf } S \end{aligned}$$

und setzen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren nun S zu einer Horizontalen und wollen o.B.d.A. $f_2 \neq 0$ voraussetzen.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= F(x_1, x_2) = (f, x) - c \end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung lautet dann

$$\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \tilde{a}_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0. \quad (2.9)$$

Dabei gilt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

insbesondere

$$\tilde{a}_{22} = f^T A f = (f, A f).$$

Wir transformieren nun die Gleichungen für die Cauchydaten:

$$x \in S \Leftrightarrow y \in \Sigma = \{(y_1, y_2) \mid y_2 = 0\}$$

Wir erhalten aus der Kettenregel

$$\nabla u = y'(x)^T \nabla v = \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \nabla v.$$

Für die Richtungsableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \nabla v, l \right) \\ &= \left(\nabla v, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} l \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y_1} \cdot l_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2} \cdot (f, l). \end{aligned}$$

Der Term (f, l) war laut unseren Voraussetzungen verschieden von Null. Ferner folgt

$$u_i(x_1, x_2) = u_i(x_1, \varphi(x_1)) = v_i(x_1) = v_i(y_1)$$

mit $i = 0, 1$ und

$$x_2 = \frac{1}{f_2}(c - f_1 x_1) =: \varphi(x_1).$$

Somit erhalten wir die transformierten Cauchydaten

$$v(y_1, 0) = v_0(y_1) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0)l_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2}(y_1, 0) \cdot (f, l) = v_1(y_1). \tag{2.11}$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

Fall 1: $\tilde{a}_{22} \neq 0$ (gutartiger Fall)

Aus (2.10) folgern wir

$$\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0) = v'_0(y_1), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = v''_0(y_1)$$

und aus (2.11)

$$\frac{\partial v}{\partial y_2} = (v_1(y_1) - l_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0)) \cdot \frac{1}{(f, l)} = (v_1(y_1) - l_1 v_0'(y_1)) \cdot \frac{1}{(f, l)}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach y_1 liefert

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{(f, l)} (v_1'(y_1) - l_1 v_0''(y_1)).$$

Nur $\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$ bekommen wir so nicht, dafür aber aus (2.9)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = -\frac{1}{\tilde{a}_{22}} \left(\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \right).$$

Somit bekommen wir alle zweiten Ableitungen von v und keine Einschränkungen an v_0 und v_1 .

Fall 2: $\tilde{a}_{22} = 0$ (ungünstiger Fall)

Hier können wir $\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$ nicht aus (2.9) berechnen. Im Gegenteil, es folgt aus (2.9) eine Einschränkung an die Cauchydaten:

$$\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} = 0,$$

das heißt

$$\tilde{a}_{11} v_0''(y_1) + 2\tilde{a}_{12} \frac{1}{(f, l)} (v_1'(y_1) - l_1 v_0''(y_1)) = 0.$$

Folgerungen:

1. Im Fall 2 ist das Cauchyproblem nicht uneingeschränkt lösbar.
2. Probleme gibt es für Richtungen f ($f = \nabla F$), welche die Gleichung

$$(f, Af) = 0$$

lösen.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück:

- Mannigfaltigkeit $F(x_1, \dots, x_n)$
- $A = A(x)$
- o.B.d.A. $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$
- $\tilde{a}_{nn} = (\nabla F(x), A(x)\nabla F(x))$

Definition: Ein Punkt $x \in S = \{x \mid F(x) = 0\}$ heißt *charakteristischer Punkt* und S heißt *charakteristisch in x* , wenn

$$(\nabla F(x), A(x)\nabla F(x)) = 0$$

gilt. S heißt *charakteristisch*, wenn dies überall auf S gilt.

Folgerung: Auf charakteristischen Mannigfaltigkeiten (Kurven bei $n = 2$, Flächen bei $n = 3$, ...) ist es nicht sinnvoll, Cauchydaten vorzugeben.

Wir wollen nun das Problem umgekehrt stellen: Wie muss eine Funktion F aussehen, damit die zugehörige Fläche S charakteristisch wird? Wir schauen uns das für $n = 2$ an, $F = F(x, y)$: Es muss gelten

$$(\nabla F, A\nabla F) = a_{11}F_x^2 + 2a_{12}F_xF_y + a_{22}F_y^2 = 0.$$

Wir werden sehen, dass die Bestimmung von F äquivalent dazu ist, die *charakteristische Gleichung*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

zu lösen.

Folgerung: Durch die Lösung der charakteristischen Gleichung gewinnen wir Funktionen, welche charakteristische Mannigfaltigkeiten erzeugen.

Einige Beispiele für charakteristische Flächen

1. Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

Die Richtung $f = \nabla F$ müßte die Gleichung

$$f_1^2 + \dots + f_n^2 = 0$$

erfüllen, was nur für $f = 0$ gilt. Die Laplacegleichung hat daher keine reellen Charakteristiken und das Cauchyproblem ist stets sinnvoll.

2. Schwingungsgleichung (1D)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

Wir erhalten die Gleichung

$$f_1^2 - a^2 f_2^2 = 0.$$

Die charakteristischen Flächen sind demzufolge $t = ax$ und $t = -ax$.

3. Schwingungsgleichung (2D)

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

Aus der Gleichung

$$f_1^2 - a^2(f_2^2 + f_3^2) = 0$$

erhalten wir die charakteristische Fläche $t^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (charakteristischer Kegel).

4. Wärmeleitgleichung (1D)

$$u_{xx} = u_t$$

Wir erhalten aus der Gleichung

$$f_1^2 + 0 \cdot f_2^2 = 0,$$

daß f_2 beliebig gewählt werden kann und somit die Charakteristiken $f(t) = 0$ oder $t = const.$. Es ist daher sinnlos, die Cauchydaten $u(x, 0)$ und $u_t(x, 0)$ vorzugeben. Aus beiden Daten heraus könnten wir nämlich Informationen über $u_{xx}(x, 0)$ gewinnen ...

Abschließend sei bemerkt, dass das Cauchyproblem auch bei nichtcharakteristischen Flächen sehr schwierig ist, oft inkorrekt gestellt. Auskunft über die Lösbarkeit gibt der berühmte

Satz 1 (Kowalewskaja) Sind alle gegebenen Größen analytisch und ist S nirgends charakteristisch, dann besitzt das Cauchyproblem in der Klasse der analytischen Funktionen lokal genau eine Lösung.

Bemerkung:

- Es kann andere, nicht analytische Lösungen geben.
- Die Lösung braucht nur lokal zu existieren.

Der Beweis ist sehr aufwändig und wird mit Potenzreihenansätzen und nachfolgendem Koeffizientenvergleich geführt.

Literatur: Petrowski, Michlin

2.5 Transformation linearer partieller Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen auf Normalform

Wir betrachten die Gleichung

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + c \cdot u + f = 0 \quad (2.12)$$

mit gegebenen Funktionen $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $b_i = b_i(x, y)$, $c = c(x, y)$ und $f = f(x, y)$ in einem Gebiet der $x - y$ -Ebene. Nun wird eine Koordinatentransformation angewendet (Ziel: Normalform),

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y).$$

Dann gilt $u(x, y) = v(\xi, \eta) = v(\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Nach Transformation entsteht

$$\tilde{a}_{11}v_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}v_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}v_{\eta\eta} + \Phi = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ \tilde{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ \tilde{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{aligned}$$

und Φ enthält alle Terme niedriger Ordnung. Unser Ziel: Wir wollen φ so wählen, dass $\tilde{a}_{11} = 0$ gilt. Das ergibt eine partielle Differentialgleichung für $z = \varphi(x, y)$:

$$a_{11}(x, y)z_x^2 + 2a_{12}(x, y)z_xz_y + a_{22}(x, y)z_y^2 = 0 \quad (2.13)$$

Lemma 1 $z = \varphi(x, y)$ ist genau dann (partikuläre) Lösung von (2.13), wenn $\varphi = c$ allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dx dy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (2.14)$$

ist.

Das ist die bereits avisierte *charakteristische Gleichung*.

Beweisgedanke: Wir zeigen nur (2.13) \Rightarrow (2.14). Dazu wollen wir annehmen, dass $\varphi(x, y) = c$ nach y auflösbar ist, d.h. wir wollen $\varphi_y \neq 0$ voraussetzen. Es sei z Lösung von (2.13). Division durch φ_y ergibt

$$a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0.$$

Wir betrachten nun die implizite Funktion $y = y(x)$, welche durch $\varphi(x, y) = c$ definiert ist. Implizite Differentiation liefert

$$\varphi_x + \varphi_y \cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Oben eingesetzt und mit dx^2 durchmultipliziert ergibt das (2.14). \square

Eine genaue Diskussion findet man bei Tikhonov/Samarski. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind wieder unsere Charakteristiken.

Wir gehen jetzt von der Form

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{12} = 0$$

von (2.14) aus. Wir erhalten zwei Lösungen

$$y'(x) = \frac{a_{12}(x, y) + \sqrt{a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)}}{a_{11}(x, y)} \quad (2.15)$$

$$y'(x) = \frac{a_{12}(x, y) - \sqrt{a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)}}{a_{11}(x, y)} \quad (2.16)$$

Folgerung: Wir haben (i.a.) zwei verschiedene Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der charakteristischen Gleichungen. Dem entsprechen zwei verschiedene Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$. Wir bemerken ferner, dass der Koeffizient \tilde{a}_{22} durch das selbe Polynom wie \tilde{a}_{11} berechnet wird. Setzen wir aber $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ so folgt $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = 0$.

Bemerkung:

1. (2.15) und (2.16) sind symmetrisch bezüglich a_{11}, a_{22} . es ist daher gleich, ob wir die charakteristische Gleichung durch $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ auflösen.
2. Die Wurzel entscheidet in (2.15) und (2.16) über den Typ der Gleichung. Wegen $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det A = -\lambda_1\lambda_2$ ist der Typ der Gleichung
 - hyperbolisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
 - parabolisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
 - elliptisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

Transformation auf Normalform:

a) Hyperbolische Gleichungen

φ und ψ seien Lösungen von (2.15),(2.16).

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = 0.$$

Dann kann nicht auch noch \tilde{a}_{12} verschwinden, sonst wäre nur der Term Φ da, welcher die Ordnung ≤ 1 besitzt. Rücktransformation ergäbe eine Gleichung erster Ordnung im Gegensatz zu unseren Annahmen.

Wir können deshalb durch \tilde{a}_{12} teilen und erhalten die *kanonische Form der hyperbolischen Gleichung*

$$v_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

Diese Form benötigen wir später für die d' Alembertsche Formel. Die Schwingungsgleichung hat nicht diese Form. Transformieren wir aber nochmals

$$\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

und bezeichnen wir die neue gesuchte Funktion mit w , so entsteht

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = G(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta).$$

b) Parabolische Gleichungen

Wir erhalten hier nur eine Funktion $\xi = \varphi(x, y)$. Das ist nicht tragisch. Man wählt für ψ eine beliebige von φ linear unabhängige Funktion. Dabei ergibt sich, daß \tilde{a}_{12} auch 0 wird. Warum das so ist, werden wir in der Übung sehen. Am Ende folgt die *kanonische Form der parabolischen Gleichung*

$$v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

c) Elliptische Gleichungen

In diesem Fall kann $\tilde{a}_{11} = 0$ nicht erreicht werden. Man kann aber das Element \tilde{a}_{12} zu Null machen. Das diskutieren wir hier nicht.

Kapitel 3

Einige elementare Lösungsmethoden

3.1 Schwingungsgleichung

3.1.1 Anfangs- und Randbedingungen

Wie man sofort sieht, ist die Lösung der Schwingungsgleichung

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) \quad (3.1)$$

nicht eindeutig bestimmt. Jede lineare Funktion löst zum Beispiel diese Gleichung. Deshalb gibt man sich zusätzliche Bedingungen vor, welche physikalisch motiviert sind.

1. Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{Anfangsauslenkung} \quad (3.2)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit} \quad (3.3)$$

Wird (3.1) für alle x , d.h. auf ganz \mathbb{R} gelöst, dann legen (3.2)–(3.3) die Lösung fest. Die Aufgabe (3.1)–(3.3) heißt *Cauchyproblem* für (3.1).

2. Randbedingungen

Wird (3.1) wie bei einer Saite, nur in einem beschränkten Gebiet $\Omega = (a, b)$ betrachtet, dann benötigt man zusätzlich zu den Anfangsbedingungen noch Randbedingungen. Gängige Randbedingungen sind

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad \text{Enden fest eingespannt} \quad (3.4)$$

$$u(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad \text{linkes Ende fest, rechtes frei} \quad (3.5)$$

3.1.2 Die d' Alembertsche Methode für das Cauchyproblem bei der eindimensionalen Schwingungsgleichung

Wir betrachten hier das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit gegebenen Funktionen φ, ψ und $a \in \mathbb{R}$. Um die Gleichung in Normalform zu bringen, bestimmen wir die Charakteristiken (Abschnitt 2.4, Beispiel 2) und nehmen davon ausgehend die Koordinatentransformation vor (wie in 2.5),

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Dann erhalten wir für $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ die Normalform

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

Diese Gleichung kennen wir schon aus Abschnitt 1.1 (Beispiel 7). Die allgemeine Lösung war

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

also

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Die unbekannt Funktionen f und g werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$$

$$u_t(x, 0) = af'(x) + ag'(x) = \psi(x),$$

also erhalten wir nach Integration der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x) \\ f(x) - g(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + c. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + \frac{c}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - \frac{c}{2} \end{aligned}$$

und somit

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_{x_0}^{x+at} \psi(y) dy - \int_{x_0}^{x-at} \psi(y) dy \right).$$

Daraus folgt unmittelbar die *d'Alembertsche Formel*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (3.7)$$

Jede Lösung von (3.6) muss dieser Formel genügen. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass die d'Alembertsche Formel eine Lösung liefert. Wir haben gezeigt:

Satz 2 Sind $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ vorgegebene Cauchydaten, so besitzt das Cauchyproblem (3.6) für die eindimensionale Schwingungsgleichung genau eine zweimal stetig partiell differenzierbare Lösung u , welche durch die d'Alembertsche Formel (3.7) gegeben ist.

Physikalische Interpretation Die Anfangsgeschwindigkeit ψ sei Null. Dann gilt

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} \quad (3.8)$$

Wir betrachten $v(x, t) = \varphi(x - at)$. Offenbar beschreibt v eine nach rechts mit Geschwindigkeit a laufende Welle. Analog steht $\varphi(x + at)$ für eine nach links laufende Welle. Damit setzt sich u zusammen aus beiden Wellen, jeweils mit halber Höhe.

Weiterführende Betrachtungen und Beispiele dazu: Tikhonov/Samarski S.54–61.

3.1.3 Die Spiegelungsmethode für die Halbgerade

Bisher hatten wir $\Omega = \mathbb{R}$, also ein unbeschränktes Ortsgebiet. Jetzt wollen wir $\Omega = \mathbb{R}_+$ betrachten, also die Halbgerade. Die Situation ist sofort völlig anders. Zu lösen sei

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}_+^2 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bei homogener Randbedingung

$$u(0, t) = 0 \quad (3.10)$$

oder

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3.11)$$

(3.10) steht für ein eingespanntes linkes Ende der Saite und (3.11) für ein frei schwingendes. Grundlage für die Methode ist folgendes

Lemma 2 *Es sei φ und ψ auf ganz \mathbb{R} definiert, $x_0 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben und $u(x, t)$ durch die d'Alembertsche Formel gegeben. Dann gilt*

$$(i) \quad u(x_0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

falls φ und ψ ungerade Funktionen bezüglich x_0 sind,

$$(ii) \quad u_x(x_0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

falls φ und ψ gerade Funktionen bezüglich x_0 sind.

Den Beweis heben wir uns für die Übung auf. Nun fällt es leicht die Lösung von (3.9)–(3.10) zu konstruieren.

Lösung von (3.9)–(3.10): $u(0, t) = 0$.

Wir definieren die ungeraden Fortsetzungen

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Um eine sinnvolle Lösung zu erhalten, müssen wir $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$ voraussetzen, sonst sind die Funktionen φ und ψ nicht glatt genug, um Satz 2 anwenden zu können.

Nach der d'Alembertschen Formel definiert man auf ganz \mathbb{R}

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy.$$

Dann löst u das Problem speziell für $x > 0, t > 0$. Es erfüllt die Anfangsbedingungen und wegen Lemma 2 auch die Randbedingung.

Wir schreiben nun noch einmal die Lösung des Problems auf, ohne die Fortsetzung zu benutzen:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. & x > 0, at \leq x \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(y) dy. & x > 0, at > x. \end{cases}$$

Analog behandelt man:

- die Randbedingung (3.11)
- beschränkte Ortsgebiete $\Omega = (0, l)$ - Hier ist eine Spiegelung an beiden Rändern erforderlich. Dabei können verschiedene Randbedingungen von Interesse sein, zum Beispiel

$$(i) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$(ii) \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

Auf diese Aufgabenstellung wird in der Übung näher eingegangen.

3.1.4 Trennung der Veränderlichen - Fouriermethode

Die Fouriermethode ist eine der zugkräftigsten Methoden für die analytische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen. Wir betrachten hier die

Aufgabe

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.13)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.14)$$

mit den homogenen Dirchletschen Randbedingungen

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.15)$$

Die Idee besteht darin, die Lösung aus (unendlich vielen) partikulären Lösungen der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.16)$$

zusammensetzen, welche die Randbedingungen (3.15) erfüllen. Dazu setzen wir (3.16) in die Schwingungsgleichung (3.12) ein, erhalten $a^2 X''T = XT''$, also

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

In dieser Gleichung laufen x und t unabhängig voneinander, daher überlegt man sofort, dass beide Seiten ein und der selben Konstanten gleich sein müssen. Diese sei $-\lambda$.

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die beiden Randbedingungen (3.15) erfüllt sein, d.h. $0 = X(0)T(t) = X(l)T(t)$ für alle t . Daraus schließt man

$$X(0) = X(l) = 0,$$

denn sonst müsste $T(t) \equiv 0$ gelten. Wir erhalten auf diese Weise eine *Sturm-Liowillesche Eigenwertaufgabe*: Gesucht sind Werte λ , für welche die Aufgabe

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ X(0) = X(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

eine nichttriviale Lösung hat.

Diskussion von (3.17)

(i) Fall $\lambda < 0$: $X = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ erfüllt nur dann die Randbedingungen in (3.17), wenn $c_1 = c_2 = 0$ gilt.

(ii) Fall $\lambda = 0$: Allgemeine Lösung ist $X = ax + b$. Die Randbedingungen ergeben sofort $X \equiv 0$.

(iii) Fall $\lambda > 0$: Wir bekommen die allgemeine Lösung

$$X = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Einarbeiten der Randbedingungen:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

$$X(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}l = \pm n\pi$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Nichttriviale Lösungen erhalten wir demnach für die *Eigenwerte*

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zugehörige *Eigenfunktionen* sind

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Für $-n \in \mathbb{N}$ ergeben sich zu X_n linear abhängige Funktionen.)

Bestimmung der zugehörigen $T_n(t)$:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Die Konstanten A_n und B_n sind noch frei wählbar, um die Anfangsbedingungen an u zu erfüllen. Unsere Partikulärlösungen sind nun

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(A_n \cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right) \right).$$

Unser *Ansatz* für $u(t, x)$ ist

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t). \quad (3.18)$$

Zunächst bestimmen wir formal A_n, B_n , indem wir (3.18) unbekümmert differenzieren bzw. den Grenzübergang $t \rightarrow 0$ gleich unter der Summe vollziehen. Wir rechtfertigen dieses Tun danach.

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (3.19)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_t u_n)(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Andererseits können wir - für hinreichend glatte φ, ψ - die Fourierentwicklung

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy$$

und eine analoge für ψ mit Koeffizienten ψ_n . Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{n\pi a} \psi_n.$$

Somit haben wir formal folgende Lösungsdarstellung erhalten:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(a \frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \varphi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy \quad (3.20) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(a \frac{n\pi}{l}t\right) \int_0^l \psi(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy. \end{aligned}$$

Nun diskutieren wir, ob solche Funktionen u wirklich Lösungen unseres Problems sind.

Satz 3 Sind Funktionen $\varphi \in C^1[0, l]$ und $\psi \in C^1[0, l]$ mit homogenen Randwerten $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ gegeben, dann konvergiert die Reihe (3.18) gleichmäßig auf $[0, l] \times \mathbb{R}$. Folglich ist u stetig und es gilt

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Beweis: Aus der Theorie der Fourierreihen folgt, dass die oben angegebenen Fourierreihen für φ und ψ absolut und gleichmäßig konvergent sind. Folglich sind konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \left| \sin \frac{n\pi}{l}x \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n| \left| \sin \frac{n\pi}{l}x \right|.$$

Für die u_n folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)| &\leq |A_n| |\sin(\dots)| |\cos(\dots)| + |B_n| |\sin(\dots)| |\sin(\dots)| \\ &\leq |\varphi_n| |\sin(\dots)| + \frac{l}{n\pi a} |\psi_n| |\sin(\dots)|. \end{aligned}$$

Damit überträgt sich die gleichmäßige Konvergenz auf (3.18). Stetigkeit und Randbedingungen für u folgen daraus sofort. \square

Viel ist das noch nicht, insbesondere soll ja $u(x, t)$ auch noch die Wellengleichung erfüllen. Wir müssen uns dazu noch mehr gleichmäßige Konvergenz erkaufen ...

Satz 4 *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

- (i) φ ist dreimal, ψ ist zweimal differenzierbar
- (ii) φ''' , ψ'' sind von beschränkter Variation
- (iii) φ , φ' und ψ haben homogene Randwerte.

Dann stellt (3.20) eine Lösung der Wellengleichung (3.12) dar, welche auch die Anfangs- und Randbedingungen (3.13)–(3.15) erfüllt.

Beweis: Differenzieren wir die Darstellung von $u(t, x)$ zweimal nach x oder t , so soll die differenzierte Reihe gleichmäßig konvergieren. Durch die Differentiation entsteht ein Faktor der Ordnung n^2 , der irgendwie kompensiert werden muss, damit letztlich vor den trigonometrischen Funktionen ein Faktor der Ordnung $1/n^2$ steht. Wir führen das für den Anteil mit ψ vor: Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} I = \int_0^l \psi(y) \sin \frac{n\pi}{l} y \, dy &= \left[-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} y \psi(y) \right]_0^l + \frac{l}{n\pi} \int_0^l \cos \frac{n\pi}{l} y \psi'(y) \, dy \\ &= \frac{l}{n\pi} \int_0^l \cos \frac{n\pi}{l} y \psi'(y) \, dy \end{aligned}$$

wegen $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Einen Faktor $1/n$ haben wir schon gewonnen. Fortsetzung unter Beachtung, dass die Sinusterme am Rande Null ergeben, liefert

$$I = - \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} y \psi''(y) \, dy$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \int_0^l \psi''(y) d\left(\cos \frac{n\pi}{l}y\right) \\
&= \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \left\{ \left[\psi''(y) \cos \frac{n\pi}{l}y\right]_0^l - \int_0^l \cos \frac{n\pi}{l}y d\psi''(y) \right\}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$|I| \leq c \cdot \frac{1}{n^3}$$

und zusammen mit dem Term $\frac{2}{n\pi a}$ in (3.20) steht ein Faktor der Ordnung $1/n^4$ in dieser Reihe. Nach zweimaligen Differenzieren bleibt immer noch $1/n^2$. Analog behandelt man den Teil mit φ . Hier muss man einmal mehr partiell integrieren, weil der Faktor $\frac{2}{n\pi a}$ fehlt. \square

Die Reihenentwicklung (3.20) kann mit Hilfe einer *Greenschen Funktion* noch prägnanter dargestellt werden. Dazu betrachten wir die *inhomogene Wellengleichung*.

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t) && \text{in } (0, l) \times (0, T) \\
u(x, 0) &= \varphi(x) \\
u_t(x, 0) &= \psi(x) \\
u(0, t) &= u(l, t) = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Zunächst nehmen wir $\varphi = \psi = 0$ an. Wir gehen wie eben vor und entwickeln für jedes t , $f(x, t)$ in eine Fourierreihe,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, && u_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(y, t) \sin \frac{n\pi}{l}y dy \\
f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l}x, && f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(y, t) \sin \frac{n\pi}{l}y dy
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieses Ansatzes und Koeffizientenvergleich erhält man die Differentialgleichungen

$$u_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t)$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die homogenen Anfangsbedingungen liefern $u_n(0) = u'_n(0) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung kann man in der Form

$$u_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) f_n(s) ds$$

darstellen, so dass man am Ende die Formel

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) f_n(s) ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(y, s) \sin \frac{n\pi}{l} y dy \right) ds \\ &= \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t \int_0^l \sin \frac{n\pi a}{l}(t-s) f(y, s) \sin \frac{n\pi}{l} y dy ds \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

erhält mit

$$G(x, y, t) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} y \sin \frac{n\pi}{l} at.$$

Definition: Die oben definierte Funktion G heißt *Greensche Funktion* zur Aufgabe (3.21).

Es zeigt sich, dass wir sie auch für $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ verwenden können. Addieren wir die Reihenentwicklung von (3.20), die φ und ψ berücksichtigt, so sehen wir nach Vertauschung von Summation und Integration

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^l \frac{\partial G}{\partial t}(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^l G(x, y, t) \psi(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-s) f(y, s) dy ds. \end{aligned} \quad (3.23)$$

In dieser Darstellung sieht man besonders schön, wie sich die Lösung linear aus den einzelnen Vorgaben zusammensetzt.

Beispiel: Schwingung einer fest eingespannten Saite

$$l = 1, \quad a = 1 \quad \varphi = 0 \quad f = 0 \quad \psi(x) = x(1-x)$$

Einsetzen in die Lösungsdarstellung ergibt

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^1 G(x, y, t) y(1-y) dy \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x \sin n\pi t \int_0^1 y(1-y) \sin n\pi y dy. \end{aligned}$$

Für das Integral berechnen wir

$$\int_0^1 y(1-y) \sin n\pi y dy = \begin{cases} 4/(n^3\pi^3), & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

also

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \sin(2k+1)\pi x \sin(2k+1)\pi t.$$

3.2 Wärmeleitgleichung

3.2.1 Anfangs- und Randbedingungen

Wir betrachten die Wärmeleitgleichung

$$u_t(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), \quad \text{in } Q = \Omega \times (0, T)$$

in einem Körper $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Es ist physikalisch einleuchtend, dass die Temperatur im Körper bei Fehlen innerer Wärmequellen eindeutig durch die Anfangstemperatur und den Wärmeaustausch mit der Umgebung an der Oberfläche bestimmbar sein sollte. Deshalb gibt man vor: Eine *Anfangsbedingung*

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega$$

sowie *Randbedingungen* auf $\Gamma = \partial\Omega$. Gängige Randbedingungen sind:

1. *Dirchletsche Randbedingung* oder *Randbedingung 1. Art*

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T) = \Sigma$$

Hier ist g eine als bekannt vorausgesetzte Randtemperatur.

2. *Neumannsche Randbedingung* oder *Randbedingung 2. Art*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = g(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T) = \Sigma$$

g steht hier für den *Wärmefluss* oder *Temperaturgradienten* am Rand.

3. *Randbedingung 3. Art*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \alpha(g(x, t) - u(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T) = \Sigma,$$

wobei g die Außentemperatur und α die sogenannte *Wärmeübergangszahl* bezeichnet.

Dirichletsche Randbedingungen werden häufig auch als wesentliche Randbedingungen bezeichnet. Im Gegensatz dazu spricht man bei Randbedingungen 2. oder 3. Art dann von natürlichen Randbedingungen.

Unter vernünftigen Voraussetzungen bestimmen Wärmeleitgleichung, Anfangs- und Randbedingungen die Lösung u eindeutig. Im Fall $\Omega = (0, l)$ müssen die Bedingungen sinnvoll modifiziert werden, weil Γ in zwei Punkte 0 und l zerfällt. Wir erhalten für die Dirichletbedingung

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(l, t) = g_l(t),$$

für die Neumannbedingung

$$-u_x(0, t) = g_0(t) \quad u_x(l, t) = g_l(t)$$

und für die Randbedingung 3. Art

$$-u_x(0, t) = \alpha(g_0(t) - u(0, t)) \quad u_x(l, t) = \alpha(g_l(t) - u(l, t)).$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Sigma$$

steht für Wärmeisolation.

3.2.2 Fouriermethode für die eindimensionale Wärmeleitgleichung

Wir betrachten dazu das Anfangsrandwertproblem mit Dirichletscher inhomogener Randbedingung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x, t) && \text{in } (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u(0, t) &= g_1(t) \\ u(1, t) &= g_2(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen f, φ, g_1, g_2 , so dass alle weiteren Umformungen erlaubt sind. Diese Aufgabe entspricht einer unendlichen Platte mit den Oberflächentemperaturen g_1, g_2 und Wärmequellen f in der Platte.

Wir führen dieses Problem auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen zurück, indem wir eine Funktion

$$U(x, t) = g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t))x$$

eingeführen. Offenbar erfüllt U die Randbedingungen. Wir machen den Ansatz

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t)$$

und müssen noch $v(x, t)$ bestimmen. Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= f - (U_t - U_{xx}) \\ &= f - (g_1' + (g_2' - g_1')x) =: \bar{f}(x, t) \\ v(x, 0) &= \varphi(x) - (g_1(0) + (g_2(0) - g_1(0))x) =: \bar{\varphi}(x) \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit das neue Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \bar{f} \\ v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x) \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nun gehen wir völlig analog zur Schwingungsgleichung vor.

In Stichpunkten:

Ansatz für Partikulärlösungen

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitgleichung

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Nichttriviale Lösungen $X = X_n$:

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x$$

Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n\pi x \\ \bar{f}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin n\pi x \\ \bar{\varphi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \sin n\pi x \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei $\bar{f}_n, \bar{\varphi}_n$ bekannt sind, aber $v_n(t)$ unbekannt. Auswertung der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich,

$$v_n(0) = \bar{\varphi}_n$$

Einsetzen in die Wärmeleitgleichung und formales Differenzieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t) \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) n^2 \pi^2 \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin n\pi x$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} v_n'(t) &= -n^2 \pi^2 v_n(t) + \bar{f}_n(t) \\ v_n(0) &= \bar{\varphi}_n \end{aligned}$$

ergibt eine gewöhnliche Differentialgleichung für v_n . Diese besitzt die Lösung

$$v_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 t} \bar{\varphi}_n + \int_0^t e^{-n^2 \pi^2 (t-s)} \bar{f}_n(s) ds.$$

Nun Einsetzen in (3.26) unter Beachtung der Formeln für die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_n &= 2 \int_0^1 \bar{\varphi}(y) \sin n\pi y \, dy \\ \bar{f}_n(s) &= 2 \int_0^1 \bar{f}(y, s) \sin n\pi y \, dy\end{aligned}$$

und das Ganze etwas umformen ...

Endergebnis:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^1 G(x, y, t) \varphi(y) \, dy + \int_0^t \int_0^1 G(x, y, t-s) f(y, s) \, dy \, ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial G}{\partial y}(x, 0, t-s) g_1(s) \, ds - \int_0^t \frac{\partial G}{\partial y}(x, 1, t-s) g_2(s) \, ds\end{aligned}$$

mit der *Greenschen Funktion*

$$G(x, y, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \sin n\pi y e^{-n^2\pi^2 t}$$

Die Frage, unter welchen Bedingungen an f , φ , g_1 , g_2 dies wirklich eine Lösung ist, wollen wir hier nicht erörtern.

Beispiele:

1. $\varphi = 1$, $f = 0$, $g_1 = g_2 = 0$

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x e^{-n^2\pi^2 t} \int_0^1 \sin n\pi y \, dy$$

Wegen

$$\int_0^1 \sin n\pi y \, dy = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 2/n\pi & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ergibt sich

$$u(x, t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}.$$

Aufgrund der Inkompatibilität von φ mit den Randdaten g_1 und g_2 ergeben sich Probleme für $t \downarrow 0$. Man beachte $u \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

2. $\varphi = 0$, $f = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 1$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= - \int_0^t 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\pi x) \cos(n\pi) e^{-n^2\pi^2(t-s)} \cdot 1 \, ds \\ &= -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\pi^2} (-1)^n \sin(n\pi x) (1 - e^{-n^2\pi^2 t}) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x e^{-n^2\pi^2 t}. \end{aligned}$$

Die erste Reihe ist eine bekannte Fourierreihe mit der Summe $\frac{\pi}{2}x$ (Bronstein). Also gilt

$$u(x, t) = x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt die Temperatur gegen die stationäre Temperaturverteilung $u(x, t) = x$, was durchaus einleuchtet.

Aber auch hier würde eine sorgfältige Untersuchung der Lösung Probleme hervorbringen.

3. Randbedingungen 2. und 3. Art

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f \\ u(x, 0) &= \varphi \\ u_x(0, t) &= 0 \\ u_x(1, t) &= \alpha(g(t) - u(1, t)) \end{aligned}$$

Der Wert α ist immer größer Null, damit die Wärme in die richtige Richtung fließt.

$$G(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \cos \mu_n x \sin \mu_n y e^{-\mu_n^2 t}$$

Dabei sind die μ_n die positiven Lösungen der Gleichung

$$\mu \tan \mu = \alpha$$

und

$$N_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\mu_n}{4\mu_n}.$$

Wir erhalten die Darstellung

$$u(x, t) = \int_0^1 G(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_0^1 G(x, y, t-s) f(y, s) ds \\ + \alpha \int_0^1 G(x, 1, t-s) g(s) ds.$$

Bei diesem Problem taucht also keine Ableitung der Greenschen Funktion auf.

3.3 Laplace-Gleichung

3.3.1 Randwertaufgaben für die Laplace-Gleichung

Sei $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Natürlich ist u nicht eindeutig festgelegt, *jede lineare Funktion* löst diese Gleichung. Deshalb fordert man zusätzliche *Randbedingungen* und kommt so zu den *Randwertaufgaben*.

Beispiele von Gebieten Ω und ihren Rändern Γ sind im Fall $n = 2$:

1. Einheitskreis: $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (beschränkt)
2. Halbebene: $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0\}$, $\Gamma = \{(x, y) \mid x = 0\}$ (unbeschränkt)
3. Parabel: $\Omega = \{(x, y) \mid y > x^2\}$, $\Gamma = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ (unbeschränkt)

Die Begriffsbildung für die Randwertaufgaben erfolgt völlig analog zu der Wärmeleitgleichung:

Erste Randwertaufgabe, Dirchlet-Problem:

Gegeben: Stetige Funktion f auf Γ

Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= f(x) & \forall x \in \Gamma\end{aligned}$$

Zweite Randwertaufgabe, Neumann-Problem:

Gegeben: Stetige Funktion f auf Γ

Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= f(x) & \forall x \in \Gamma\end{aligned}$$

Dritte Randwertaufgabe:

Gegeben: Stetige Funktion α, β, f auf Γ

Gesucht $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta(x) u(x) &= f(x) & \forall x \in \Gamma\end{aligned}$$

3.3.2 Lösung des Dirichletproblems für einen Kreis

Wir lösen die Aufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= f & \text{auf } \Gamma\end{aligned}$$

für den Einheitskreis

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

In diesem Fall führt man am besten Polarkoordinaten ein und sucht $u(r, \varphi)$. Die Funktion f habe die Form $f = f(\varphi)$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Nach Transformation der Differentialgleichung in Polarkoordinaten erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} &= 0 \\ u(1, \varphi) &= f(\varphi)\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$0 < r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Wieder wenden wir die Fouriemethode an und machen für partikuläre Lösungen den Ansatz

$$u = R(r)\Phi(\varphi).$$

Nach dem nun bereits bekannten Schema ergeben sich für R und Φ die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Phi'' + \lambda\Phi &= 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0\end{aligned}$$

Man nutzt die 2π -Periodizität für die Randbedingungen von Φ

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

und erhält am Ende $\lambda = 0$ oder $\lambda = n^2$. Es ergeben sich die Eigenfunktionen

$$\Phi_n = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi$$

und $\Phi_0 = a_0/2$. Die Gleichung für r hat die Lösungen r^n und r^{-n} . Die zweite Lösung ist singular bei $r = 0$, also wählen wir r^n ,

$$\begin{aligned}u_n(r, \varphi) &= r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \\ u_0(r, \varphi) &= \frac{a_0}{2}.\end{aligned}$$

Insgesamt setzen wir also an

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (3.28)$$

mit unbekanntem Koeffizienten a_i und b_i . Diese Koeffizienten sind schnell aus der Fourierreihe von f bestimmt:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz der Reihe (3.28) mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß. Wegen $r \leq 1$ ist

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

eine Majorante. Ist sie konvergent? Dazu sei f' stückweise stetig. Dann folgt zum Beispiel für b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\varphi \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi f'(\varphi) d\varphi \\ &= 0 + \frac{1}{n} \beta_n, \end{aligned}$$

wobei β_n die Fourierkoeffizienten von f' sind. Weil f' insbesondere quadratisch integrierbar ist, folgt aus der Theorie der Fourierreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty.$$

Das ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\beta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \beta_n^2 \right) < \infty.$$

Analoges gilt für a_n . Damit ist (3.28) gleichmässig konvergent und $u(r, \varphi)$ stetig in $\bar{\Omega}$. In Ω , d.h. für $r < 1$, erzeugt der Faktor r^n die gleichmässige Konvergenz der entsprechenden Ableitungen von u . Es gilt daher $\Delta u = 0$ in Ω .

Folgerung: Für stückweise glattes f mit $f(0) = f(2\pi)$ stellt (3.28) eine Lösung des Dirchlet-Problems (3.27) dar.

Es gilt jedoch sogar der

Satz 5 Sei f eine beliebige auf $[0, 2\pi]$ stetige Funktion mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann stellt (3.28) eine Lösung des Dirchlet-Problems (3.27) dar.

Analog zu unserer früheren Vorgehensweise formen wir nun (3.28) um, indem wir die Formeln für a_n und b_n einsetzen:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\psi) (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) d\psi$$

Mit Hilfe von $\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi = \cos n(\psi - \varphi)$ formt man weiter um

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n(\psi - \varphi) d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\psi - \varphi) \right) d\psi \end{aligned}$$

Jetzt verwendet man die trickreiche Umformung

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{Re} e^{in\omega} \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\omega})^n \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{1 - re^{i\omega}} \end{aligned}$$

und erhält nach etwas Rechnen

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\psi - \varphi) &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n(\psi - \varphi) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)}. \end{aligned}$$

Am Ende ergibt sich so das *Poissonsche Integral*

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Für einen Kreis mit Radius R lautet die Formel

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Schauen wir uns die Formel noch etwas genauer an, dann kommt man noch zu einer anderen Darstellung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} f(y) \frac{|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{y} - \vec{x}|^2} dS_y.$$

Bemerkung: Für die Kugel gilt

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} f(y) \frac{|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} dS_y.$$

oder

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi R} \int_{\partial B_R} f(\vartheta', \varphi') \frac{R^2 - r^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma)^{3/2}} dS_y,$$

wobei γ der Winkel zwischen den Punkten (r, ϑ, φ) und $(R, \vartheta', \varphi')$ ist.

Beispiel: Stationäre Wärmeleitung

Wir betrachten das Ganze zweidimensional für einen Kreis mit Radius 1. Auf der einen Hälfte liege die Temperatur T an, auf der anderen die Temperatur 0. Der Prozess sei so lange gelaufen, dass wir von einer stationären Wärmeleitung sprechen können.

Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so fest, dass

$$f(\psi) = \begin{cases} T & \text{für } 0 \leq \psi < \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \psi < 2\pi \end{cases}$$

gilt. Nach unserem Reihenansatz vor der Poisson-Formel gilt

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n(\psi - \varphi) d\psi.$$

Mit unserem speziellen f erhalten wir

$$u(r, \varphi) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\pi} \cos n(\psi - \varphi) d\psi.$$

Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos n(\psi - \varphi) d\psi &= \left[\frac{1}{n} \sin n(\psi - \varphi) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} (\sin n(\pi - \varphi) - \sin(-n\varphi)) \\ &= \frac{1}{n} (\sin(n\pi - n\varphi) - \sin n\varphi) \\ &= \frac{1}{n} (\cos n\pi \sin(-n\varphi) - \sin n\varphi) \\ &= \frac{1}{n} (-1)^n \sin(-n\varphi) - \sin n\varphi \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade,} \\ \frac{2}{n} \sin n\varphi & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das Ganze eingesetzt ergibt

$$u(r, \varphi) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} \frac{2}{2k+1} \sin(2k+1)\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erhalten wir den Mittelwert $u = \frac{T}{2}$. Für $\varphi = \pi/2$ und $r = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}u(1, \pi/2) &= \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (-1)^k \\ &= \frac{T}{2} + 2 \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= T.\end{aligned}$$

Kapitel 4

Klassische Theorie elliptischer Differentialgleichungen

4.1 Die Laplace-Gleichung

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$, welche die Laplace-Gleichung löst, heißt *harmonisch* in Ω .

Laplace- und Poisson-Gleichung sind Musterbeispiele elliptischer Gleichungen. Allgemeinere Vertreter dieses Typs werden wir später diskutieren. Die Laplace-Gleichung ist *rotationsinvariant*. Das heißt, wenn $u = u(x)$ harmonisch ist und T eine orthogonale Koordinatentransformation, so ist auch $v = u(Tx)$ harmonisch. Deshalb ist es sinnvoll zunächst *radialsymmetrische* Lösungen der Laplace-Gleichung zu suchen. Dazu sei $x^o \in \mathbb{R}^n$ ein fester (Mittel-)Punkt,

$$r = r(x) = |x - x^o| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^o)^2 \right)^{1/2}$$

und u als Funktion von r angenommen, also $u = u(r) = u(|x - x^o|)$. Man bestätigt leicht (siehe Übung) den folgenden Sachverhalt: Ist u harmonisch und $u = u(r)$, dann gilt

$$u(r) = \begin{cases} c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \\ c_1 + c_2 \ln r & n = 2. \end{cases}$$

Definition: Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)v_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

nennt sich *Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung*. Dabei bezeichnet v_n das Volumen der Einheitskugel des \mathbb{R}^n .

Bemerkung: Den Grund für die Wahl der Konstanten sehen wir später.

$$v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}.$$

Man beachte die Singularität der Fundamentallösung im Nullpunkt.

Für das Folgende wiederholen wir einige Sätze aus der Vektoranalysis: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet mit Rand Γ , $a : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und alle Größen hinreichend glatt. Grundlegend ist der *Gaußsche Satz*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} a \, dx = \int_{\Gamma} a \cdot \nu \, dS.$$

Dabei ist ν die nach außen zeigende Normale an Γ . Für $a = ue_i$ ($u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, e_i : i-ter Einheitsvektor) ergibt sich mit

$$\int_{\Omega} D_i u \, dx = \int_{\Gamma} uv_i \, dS = \int_{\Gamma} u \cos(\nu, e_i) \, dS$$

die *Formel der partiellen Integration*. Außerdem leitet man aus dem Gaußschen Satz (siehe Übung) die *1. Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

her. Als unmittelbare Folgerung daraus ergibt sich die *2. Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS.$$

Bezeichnungen bei den mehrdimensionalen Integralen:

- $B(x_o, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_o| < r\}$ (offene Kugel mit Radius r um x_o)

- $S(x_o, r) = \partial B(x_o, r)$ (Sphäre, Kugeloberfläche)
- $|B(x, r)|, |S(x, r)|$ bezeichnet Raum- bzw. Oberflächeninhalt der Kugel bzw. der Sphäre.

Aus dem Cavalieri-Prinzip folgt

$$v_n = \int_{|x| \leq 1} dx = \int_0^1 \int_{|x|=r} dS_x dr = \int_0^1 \omega_n r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n},$$

also

$$|B(0, 1)| = \frac{1}{n} |S(0, 1)|.$$

4.2 Poisson-Gleichung

Wir werden später sehen, dass sich $\Delta\Phi$ wie die sogenannte δ -Distribution verhält, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi(x) f(x) dx = f(0)$$

bei hinreichend glatter Funktion f . Die Funktion $\Phi(x)$ ist harmonisch, somit auch $\Phi(x - y)$ bei festem y und folglich auch $\Phi(x - y)f(y)$. Integrieren wir über \mathbb{R}^n , so erwartet man deshalb, dass auch

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy \quad (4.1)$$

harmonisch ist, indem man formal

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot f(y) dy = 0$$

rechnet. Diese Herangehensweise ist nicht nur inkorrekt, sie führt sogar zu einem falschen Ergebnis. Die Funktion Φ hat eine Singularität der Ordnung $|x|^{2-n}$ und ist damit problemlos integrierbar. Nach zweimaliger Differentiation sieht die Situation anders aus. Die Ordnung ist nun $|x|^{-n}$ und das Integral existiert nicht mehr. Im nächsten Satz sehen wir, was wirklich passiert. Dazu definieren wir noch $C_0^2(\mathbb{R}^n)$ als die Menge aller zweimal stetig auf \mathbb{R}^n differenzierbaren Funktionen, die außerhalb einer kompakten Menge verschwinden.

Satz 6 Es sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ und u durch die Formel (4.1) gegeben. Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

Beweis: (i) $u \in C^2$

Wir schreiben um,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y) dy$$

Da Φ auf \mathbb{R}^n integrierbar ist, kann man Grenzübergänge und Integration vertauschen (Lebesgues Satz über die dominierte Konvergenz, Integration über eine kompakte Menge)

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) D_i f(x-y) dy \\ D_i D_j u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) D_i D_j f(x-y) dy. \end{aligned}$$

Wegen $f \in C^2$ ist offenbar auch $D_i D_j u$ stetig, daher $u \in C^2$.

(ii) Formel (4.2)

Φ hat eine Singularität bei Null. Deshalb müssen wir folgende wichtige Methode anwenden:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned}$$

I_ε wird mit ε klein, denn

$$|I_\varepsilon| \leq c \|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dy \leq \begin{cases} c \cdot \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & n = 2 \\ c \cdot \varepsilon^2 & n \geq 3 \end{cases}$$

Bei J_ε integrieren wir partiell und verwenden die Kurzschreibweisen $B_\varepsilon = B(0, \varepsilon)$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS_y - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \nabla \Phi(y) \nabla_y f(x-y) dy \\ &= K_\varepsilon + L_\varepsilon \end{aligned}$$

K_ε wird wieder mit ε klein, denn

$$|K_\varepsilon| \leq c \|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \int_{\Gamma_\varepsilon} |\Phi(y)| dS_y \leq \begin{cases} c \cdot \varepsilon |\ln \varepsilon| & n = 2 \\ c \cdot \varepsilon & n \geq 3 \end{cases}$$

Bei L_ε integrieren wir noch einmal partiell, um $\Delta \Phi = 0$ ins Spiel zu bringen

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS_y + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \Delta \Phi(y) f(x-y) dy \\ &= - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS_y, \end{aligned}$$

weil Φ außerhalb des Nullpunktes harmonisch ist. $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(y) &= -\frac{1}{nv_n |y|^n} y, \quad \nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \text{ auf } \Gamma_\varepsilon. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} &= \nabla \Phi \cdot \nu = \frac{1}{nv_n} \frac{|y|^2}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= -\frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) dS_y \\ &= -\frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \left(f(x) \int_{\Gamma_\varepsilon} dS_y + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) - f(x) dS_y \right) \end{aligned}$$

$$= -f(x) - \frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) - f(x) dS_y$$

Hier haben wir schon

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} dS_y = nv_n \varepsilon^{n-1}$$

benutzt. Der letzte Term wird auch klein mit ε :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(x-y) - f(x) dS_y \right| &\leq \frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\Gamma_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| dS_y \\ &\leq \frac{1}{nv_n \varepsilon^{n-1}} \|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \cdot \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} dS_y \\ &\leq \|\nabla f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Vollziehen wir nun den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$, so erhalten wir

$$\Delta u(x) = -f(x),$$

was äquivalent zu (4.2) ist. □

Im Sinne dieses Satzes können wir formal schreiben

$$-\Delta \Phi = \delta_0$$

(δ_0 - Dirac-Maß oder δ -Distribution) und rechnen formal

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\delta_x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Im Abschnitt Distributionen werden wir diese intuitive Herangehensweise präzisieren.

4.3 Mittelwertsatz und Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Die beiden Sätze liefern den Schlüssel zur Beantwortung der Eindeutigkeitsfrage von Lösungen für Randwertprobleme bei elliptischen Gleichungen.

Satz 7 (*Mittelwertsatz für harmonische Funktionen*) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$. Dann gilt für jede Kugel $B(x, r) \subset \Omega$*

$$u(x) = \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Beweis: Wir setzen

$$\varphi(r) = \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(0, 1)} u(x + rz) dS_z.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(0, 1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS_z \\ &= \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS_y \\ &= \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} \nabla u(y) \cdot \nu dS_y \\ &= \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach der 1. Greenschen Formel. Damit ist φ konstant für alle $r > 0$, also

$$\varphi(r) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{|S(x, t)|} \int_{S(x, t)} u(y) dS_y = u(x)$$

womit der erste Teil bewiesen ist. Die zweite Formel folgt aus der ersten

$$\int_{B(x,r)} u(y) dy = \int_0^r \left(\int_{S(x,r)} u(y) dS_y \right) dr = \int_0^r u(x) |S(x,r)| dr = u(x) |B(x,r)|.$$

mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips. \square

Die Auswirkungen des Mittelwertsatzes sind gravierend. Das sehen wir am Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

Satz 8 (Starkes Maximumprinzip) *Eine in einem Gebiet Ω harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ nimmt ihr Maximum oder Minimum in keinem inneren Punkt von Ω an, es sei denn, u ist konstant in Ω .*

Beweis: Es sei $x_o \in \Omega$ ein Punkt mit $u(x_o) = \max_{x \in \Omega} u(x) = M$. Da x_o ein innerer Punkt ist, können wir eine Kugel $B(x_o, r)$ um x_o legen, die ganz in Ω liegt. Der Mittelwertsatz liefert

$$M = u(x_o) = \frac{1}{|B(x_o, r)|} \int_{B(x_o, r)} u(y) dy < \frac{1}{|B(x_o, r)|} M \cdot |B(x_o, r)| = M,$$

falls u irgendwo in $B(x_o, r)$ kleiner als M wäre (da u stetig ist), also einen Widerspruch. Folglich muss $u(x) \equiv M$ in $B(x_o, r)$ gelten. Sei x_1 ein beliebiger anderer Punkt in Ω . Wir zeigen

$$u(x_o) = u(x_1),$$

womit der Satz bewiesen ist. Wir wenden dazu das *Kreiskettenverfahren* an. Wir verbinden x_o und x_1 durch eine ganz in Ω verlaufende Kurve (Ω ist als Gebiet zusammenhängend). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass alle Punkte der Kurve einen Abstand größer als r von $\partial\Omega$ haben. Wir wählen nun den Schnittpunkt von $S(x_o, r)$ mit der Kurve als Mittelpunkt für die nächste Kugel mit Radius r . Nach endlich vielen solchen Schritten liegt x_1 im Inneren einer solchen Kugel. In allen Kugeln ist u konstant gleich M , also gilt dies auch für x_1 . \square

Bemerkungen: Es gilt also

(i) Das Maximum (Minimum) von u wird stets auf dem Rand angenommen (*Maximumprinzip*).

(ii) Ist u nicht konstant, dann wird das Maximum (Minimum) nur auf dem Rand angenommen (*starkes Maximumprinzip*).

Folgerung 1 Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma,\end{aligned}\tag{4.3}$$

dann folgt aus $g \geq 0$ auf Γ auch $u \geq 0$ in Ω . Ist zusätzlich g irgendwo auf Γ positiv, so gilt $u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Denn: Erstens kann u nicht negativ sein, weil sonst das Minimum nicht auf dem Rand läge. Zweitens würde $u(x_o) = 0$ mit $x_o \in \Omega$ ein inneres Minimum sein, damit $u \equiv 0$. Daraus würde aber $g \equiv 0$ folgen.

Folgerung 2 (Eindeutigkeit) Es seien $g \in C(\Gamma)$ und $f \in C(\Omega)$ vorgegeben. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ des Problems

$$\begin{aligned}-\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Beweis: Existieren zwei Lösungen u_1 und u_2 von (4.4), dann löst die Differenz $u_1 - u_2$ das Dirichlet-Problem (4.3) mit homogenen Randdaten $g \equiv 0$. Daraus folgt offenbar $u_1 - u_2 \equiv 0$, d.h. $u_1 = u_2$. \square

Folgerung 3 Löst u das Dirichlet-Problem (4.3) und gilt $|g(x)| \leq c$ auf Γ , dann gilt auch $|u(x)| \leq c$ in Ω .

Folgerung 4 Es seien u_1 und u_2 Lösungen des Dirichlet-Problems (4.3) zu g_1 und g_2 . Dann folgt aus $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \delta$ auf Γ die Eigenschaft

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \delta \quad \text{in } \Omega.$$

Damit hängt die Lösung des Dirichlet-Problems stetig von den Daten ab.

Folgerung 5 Ω sei beschränkt und $\{u_n\}$ eine Folge harmonischer Funktionen in Ω , $u_n \in C(\bar{\Omega})$. Konvergiert u_n gleichmäßig auf Γ , so auch in Ω .

Wir betrachten nun noch das Neumann-Problem. Mit $u(x)$ löst auch $u(x) + c$ das Problem, da jede Konstante das homogene Neumann-Problem löst. Die Lösung kann also nur bis auf eine Konstante bestimmt sein. Kann die Unbestimmtheit noch größer sein ?

Lemma 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreisgebiet, u harmonisch in Ω und stetig in $\bar{\Omega}$, (x_o, y_o) sei Randpunkt von Ω . Es gelte

$$u(x, y) > u(x_o, y_o) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Die Richtung ν bilde mit der inneren Normalen an (x_o, y_o) einen spitzen Winkel. Existiert $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in (x_o, y_o) , dann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_o, y_o) > 0.$$

Beweis: siehe Petrowski.

Bemerkungen: (i) Ausgehend von (x_o, y_o) muss u in Richtung ν ansteigen, deshalb scheint die Aussage auf den ersten Blick plausibel zu sein. Doch Vorsicht !

$$n = 1, \quad u(x) = x^2, \quad u(0) = 0, \quad u(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{aber} \quad u'(0) = 0.$$

(ii) Im Fall $n = 1$ sieht man dies sofort ein. Harmonische Funktion: $u = u(x)$ mit $u''(x) = 0$. Kreisgebiet entspricht hier einem offenen Intervall (a, b) .

$$u''(x) = 0 \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow u(x) = c_1x + c_2$$

Dann ist entweder u konstant, oder u besitzt einen nicht verschwindenden Anstieg.

Lemma 4 Wir setzen voraus, dass Γ in jedem Punkt von einem Kreis berührt werden kann, der ganz in Ω liegt. Ist $u \in C(\bar{\Omega})$ nicht konstant und harmonisch in Ω und nimmt u in P_o sein Minimum (Maximum) an, dann gilt in P_o :

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad (> 0)$$

(n : äußere Normale), falls $\frac{\partial u}{\partial n}$ existiert.

Beweis: Wir legen einen Kreis B von innen an $P_o = (x_o, y_o)$. Nach dem starken Maximumprinzip für Ω gilt $u(x_o, y_o) < u(x, y)$ für alle Punkte $(x, y) \in \Omega$. Der Rest folgt dann aus Lemma 3. Analog für ein Maximum. \square

Satz 9 *Erfüllt Γ die Voraussetzungen von Lemma 4, dann unterscheiden sich Lösungen des Neumann-Problems nur um eine Konstante.*

Beweis: Seien u_1 und u_2 harmonisch und $\frac{\partial u_i}{\partial n} = f$ auf Γ . Dann ist auch $u = u_1 - u_2$ harmonisch und $\frac{\partial u}{\partial n} = f - f = 0$ auf Γ . Wenn u nicht konstant ist, dann liegt das Minimum nur auf Γ . Aus Lemma 4 folgt dann aber $\frac{\partial u}{\partial n}(P_o) \neq 0$ und damit ein Widerspruch. \square

Bisher haben wir die Frage nach der Existenz einer Lösung des Dirichlet-Problems nur für $\Omega =$ Einheitskreis beantworten können. Allgemein ist diese Frage nicht einfach zu lösen. Für das folgende Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ existiert ein *Beispiel mit stetigen Randdaten $f(x)$, so dass keine Lösung des Dirichlet-Problems existiert:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wir lassen diese Funktion um die y -Achse rotieren. Das ergibt einen sehr spitzen Trichter. Im Beispiel von Lebesgue ist Ω eine Kugel mit herausgenommenen Trichter (siehe Zachamanoglu/Thoe).

Solche zu spitze Ausschnitte muss man vermeiden, um die Existenz von Lösungen zu erhalten. Es gilt: Ist Γ hinreichend regulär und f stetig, dann existiert eine Lösung des Dirichlet-Problems. Hinreichend regulär: zum Beispiel *Kegelbedingung*: Jedes $x \in \Gamma$ kann durch einen Kegel K von außen so berührt werden, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung $B_\rho(x)$ gilt

$$\{x\} = \bar{\Omega} \cap K \cap B_\rho(x),$$

d.h. der Kegel und das Gebiet haben nur den Scheitelpunkt des Kegels gemeinsam.

4.4 Die Greensche Funktion

Wir haben in 4.2 eine Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung hergeleitet, allerdings nur für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$. Hier werden wir den schwierigeren Fall eines beschränkten Gebietes Ω mit Rand Γ der Klasse C^1 behandeln, und zwar für (4.4),

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dazu sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ beliebig gegeben, $\varepsilon > 0$ und $x \in \Omega$ beliebig fixiert. Wir integrieren dann über

$$V_\varepsilon = \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$$

(ε so klein, dass $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$). Wir erhalten

$$\int_{V_\varepsilon} u(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy = \int_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS_y$$

nach der zweiten Greenschen Formel. Die Integrale über Γ_ε behandelt man wieder wie im Beweis von Satz 6 und erhält für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS_y \rightarrow 0, \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \, dS_y \rightarrow -u(x).$$

Wegen $\Delta \Phi = 0$ für $x \neq y$ verschwindet der entsprechende Term. Deshalb ergibt sich nach $\varepsilon \downarrow 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS_y - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \, dS_y \\ &\quad - \int_{\Omega} \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese Formel gilt für jedes $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Bemerkung: Rein intuitiv hätten wir (4.5) mit folgender, nicht ganz sauberer Rechnung bekommen: Wir wissen $-\Delta \Phi(y-x) = \delta_x$. Damit folgt aus

$$\int_{\Omega} \Delta \Phi(y-x) u(y) - \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy = \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS_y$$

direkt (4.5).

Nun wenden wir (4.5) auf die Poisson-Gleichung an: Wegen $-\Delta u = f$ in Ω und $u = g$ auf Γ fehlt uns nur noch $\partial u / \partial \nu$ auf Γ , um u im Inneren zu bestimmen. Leider haben wir den Term $\partial u / \partial \nu$ nicht. Mit einem Trick kann dieser Term aber eliminiert werden. Wir definieren dazu eine Korrekturfunktion $\Phi^x(y)$ durch

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi^x &= 0 && \text{in } \Omega \\ \Phi^x &= \Phi(y-x) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

und nehmen einfach an, dass diese Lösung existiert. Formal:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Phi^x(y) \Delta u(y) dy &= -\int_{\Omega} u \Delta \Phi^x dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^x}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi^x dS_y \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^x}{\partial \nu} u dS_y - \int_{\Gamma} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y \end{aligned} \quad (4.6)$$

Definition: Die Funktion G ,

$$G(x, y) = \Phi(y-x) - \Phi^x(y), \quad x, y \in \bar{\Omega}, \quad x \neq y,$$

heißt *Greensche Funktion*. Was leistet sie (falls wir sie konstruieren können)? Addieren wir (4.5) und (4.6), so fallen die Terme mit $\partial u / \partial \nu$ weg,

$$\begin{aligned} u &= \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial \Phi^x}{\partial \nu} - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS_y + \int_{\Omega} (\Phi^x - \Phi(y-x)) \Delta u dy \\ &= -\int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_y - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy, \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \nu(y) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Daraus folgern wir

Satz 10 Ist $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

dann besitzt u die Darstellung

$$u(x) = - \int_{\Gamma} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_y + \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy. \quad (4.8)$$

Bemerkungen: (i) Der Satz sagt nichts über die Existenz von u aus. Auch die Existenz von $G(x, y)$ wird angenommen.

(ii) Die Greensche Funktion wurde wie folgt konstruiert: Für festes x betrachtet als Funktion von y , gilt

$$\begin{aligned} -\Delta G &= \delta_x && \text{in } \Omega \\ G &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Die Korrektur Φ^x erfolgt so, dass G die homogene Randbedingung erfüllt, was Φ selbst nicht gewährleistet. Entsprechend verfährt man auch bei anderen Randbedingungen.

Nun bleibt die Frage: Wie erhalten wir G ? Das geht nur bei einfachen Geometrien. Im letzten Kapitel haben wir bei Intervallen Ω die Fouriermethode benutzt. Weitere Beispiele sind der Halbraum und die Kugel.

1. Greensche Funktion für den Halbraum - Spiegelungsmethode

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$$

Wir spiegeln den Punkt x an der x_n -Achse und erhalten den Punkt $\tilde{x} = (x_1, \dots, -x_n)$. Als Ansatz für die Greensche Funktion wählen wir

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}).$$

Da \tilde{x} außerhalb von Ω liegt, besitzt $\Phi(y - \tilde{x})$ keine Singularität in Ω . Somit gilt

$$\Delta_y G(x, y) = \Delta_y \Phi(y - x) - \Delta_y \Phi(y - \tilde{x}) = -\delta_x$$

und auf Γ

$$G(x, y) = \Phi \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \dots \\ 0 - x_n \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \dots \\ 0 + x_n \end{pmatrix} = 0,$$

da aus der Radialsymmetrie der Fundamentallösung unmittelbar die Symmetrie bezüglich einzelner Koordinaten folgt.

Spezialfall $n = 2$:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} (\ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} - \ln \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2})$$

Wir gehen nun besser zu den gebräuchlichen Variablenbezeichnungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

über (man bezeichnet die Integrationsvariablen meist mit griechischen Buchstaben).

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} (\ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} - \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2})$$

Für die Normalenableitung erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = -D_\eta G = \frac{1}{\pi} \frac{-y}{(\xi - x)^2 + y^2}.$$

Wir betrachten nun die Lösung u von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aus (4.8) folgt

$$u(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y, \xi, 0) d\xi$$

und damit die *Poissonsche Integralformel für die Halbebene*.

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Ähnliche Formeln ergeben sich für höherdimensionale Halbräume (Strauss, Evans):

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \\ u(x, y) &= \frac{2x_n}{nv_n} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy, \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

Definition: Die Funktion

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{nv_n} |x - y|^{-n}$$

heißt *Poissonscher Kern für den Halbraum*.

2. Greensche Funktion für die Kugel

Auch hier führt die Spiegelungsmethode zum Ziel.

Definition: Es sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt der Punkt

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

Spiegelpunkt zu x .

Wir machen wieder den Ansatz

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi^x(y).$$

Die Korrekturfunktion wird nun wieder mit Hilfe des Spiegelungspunktes konstruiert. Dabei benutzt man, dass die Funktion

$$\Phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x}))$$

wieder harmonisch ist. Auf dem Rand der Kugel $y \in S(0, 1)$ erhalten wir

$$|x|^2 |y - \tilde{x}|^2 = |x|^2 \left(1 - 2y \cdot x \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right) = |x|^2 - 2y \cdot x + |y|^2 = |x - y|^2.$$

Da Φ nur vom Betrag des Arguments abhängt, gilt deshalb für $y \in S(0, 1)$

$$\Phi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \Phi(y - x)$$

und daher hat unsere Greensche Funktion wieder homogene Randdaten.

Definition: Die Greensche Funktion für die Kugel ist

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \quad (n \geq 2).$$

Wir betrachten nun das Dirchlet-Problem auf der Einheitskugel

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & |x| &< 1 \\ u &= g, & |x| &= 1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Aus (4.8) folgt

$$u(x) = - \int_{|y|=1} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_y.$$

Wir wissen bereits aus der Übung

$$\nabla |y| = \frac{y}{|y|}.$$

Weiter geht es wie folgt:

$$\nabla \Phi(y) = \frac{1}{n(n-2)v_n} \nabla \frac{1}{|y|^{n-2}} = -\frac{1}{nv_n} \frac{y}{|y|^n},$$

also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) = -\frac{1}{nv_n} \frac{y \cdot (y-x)}{|y-x|^n}.$$

Für den zweiten Term ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(|x|(y-\tilde{x})) = -\frac{1}{nv_n} |x| \frac{y \cdot |x|(y-\tilde{x})}{|x|^n |y-\tilde{x}|^n} = -\frac{1}{nv_n} \frac{y \cdot (|x|^2 y - x)}{|y-x|^n}.$$

Dabei haben wir wieder $|x||y-\tilde{x}| = |y-x|$ auf $S(0,1)$ benutzt. Für G folgt daraus

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -\frac{1}{nv_n} \frac{y \cdot (y-x) - y \cdot (|x|^2 y - x)}{|y-x|^n} = -\frac{1}{nv_n} \frac{1 - |x|^2}{|y-x|^n},$$

woraus wir die Formel

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{nv_n} \int_{|y|=1} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dS_y$$

ableiten. Für eine Kugel mit Radius r folgt durch Transformation

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{nv_n} \int_{|y|=r} \frac{g(y)}{|y-x|^n} dS_y$$

die *Poissonsche Formel für die Kugel*. Diese hatten wir für den Fall $n = 3$ bereits am Ende des dritten Kapitels angegeben.

Kapitel 5

Schwache Lösungen elliptischer Differentialgleichungen

5.1 Distributionen

5.1.1 Motivation

Wir rufen noch einmal die Wärmeleitgleichung zurück. Sie wurde unter der Annahme hergeleitet, dass keine inneren Wärmequellen im betrachteten Ortsgebiet vorhanden sind. Im Unterschied dazu sollen nun solche Quellen mit der Dichte $f(x, t)$ (Wärmemenge pro Volumen- und Zeiteinheit) vorliegen. Ein Vergleich zur Herleitung ergibt dann die Wärmebilanz

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D (u_t - \operatorname{div} k \operatorname{grad} u) \, dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D f(x, t) \, dx dt$$

und schließlich wegen der Beliebigkeit von t_i, D

$$u_t(x, t) - \operatorname{div} k \operatorname{grad} u(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, T).$$

Dieser Zugang funktioniert nur für integrierbares f , d.h. $f \in L^1(Q)$, $Q = \Omega \times (0, T)$. Punktförmige Wärmequellen f können damit nicht erfasst werden. Wäre die Quelle auf $x_o \in \Omega$ konzentriert, so müssten wir $D = \{x_o\}$ wählen,

und bei der Integration entstünde

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \int_D f(x, t) \, dx dt = 0,$$

also wieder die homogene Wärmeleitgleichung. Um hier sinnvoll vorgehen zu können, betrachten wir zunächst eine Wärmequelle mit zeitlich konstanter Dichte

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \notin B(x_o, \varepsilon) \\ \frac{1}{|B(x_o, \varepsilon)|} & x \in B(x_o, \varepsilon) \end{cases}$$

Jetzt ist der Wärmehalt von 1 genau auf die ε -Kugel um x_o konzentriert. Außerdem wollen wir die stationäre Wärmeleitung annehmen ($u(x, t) = u(x)$, $u_t = 0$),

$$-\operatorname{div} k \operatorname{grad} u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Wir multiplizieren mit einer stetigen Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch und integrieren. Dann entsteht

$$\int_\Omega -\varphi(x) \operatorname{div} k \operatorname{grad} u_\varepsilon(x) \, dx = \int_{B(x_o, \varepsilon)} f_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx$$

Jetzt vollziehen wir den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$. Was die Lösung u_ε dabei macht, ist momentan unklar. Aber die rechte Seite strebt gegen

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B(x_o, \varepsilon)} f_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{|B(x_o, \varepsilon)|} \int_{B(x_o, \varepsilon)} 1 \cdot \varphi(x) \, dx = \varphi(x_o)$$

Der Grenzwert ordnet jedem $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ den Wert $\varphi(x_o)$ zu und ist damit ein lineares stetiges Funktional. Mit Funktionalen dieser Bauart werden wir es im Weiteren zu tun haben.

5.1.2 Begriff der Distribution

Im Weiteren sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition: Die Menge

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

heißt *Träger* (support) von φ . Es ist die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb der φ identisch verschwindet.

Definition: $C_o^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, ist die Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in Ω .

Beispiel

1. $N = 1$, $\Omega = (-2, 2)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zu $C_o^\infty(\Omega)(-2, 2)$.

$C_o^k(\Omega)$ kann nicht normiert werden und ist folglich auch kein Banachraum. Wir benötigen einen Konvergenzbegriff in $C_o^\infty(\Omega)$. Die Menge $C_o^\infty(\Omega)$, versehen mit diesem Konvergenzbegriff, nennen wir $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definition: Seien $\varphi_n, \varphi \in C_o^\infty(\Omega)$. Die Folge φ_n konvergiert in $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen φ , wenn gilt:

- (i) Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $\text{supp } \varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \varphi \subset K$
- (ii) $D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{C} D^\alpha \varphi$ auf K (gleichmäßige Konvergenz) für alle Multiindizes α .

Definition: Eine Distribution ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in \mathbb{R} , die bezüglich des oben eingeführten Konvergenzbegriffes stetig ist, d.h.

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$$

Beispiele

2. Diracsche δ -Distribution, $T = \delta_a$

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) \quad (a \in \mathbb{R}^N, \text{ fest})$$

3. $T(\varphi) = (D^\alpha \varphi)(a)$ ist eine Distribution.

Mathematisch besser zu behandeln sind *reguläre Distributionen*:

4. $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ = Menge aller lokal integrierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. f ist meßbar und $\int_K f(x) dx < \infty$ für alle kompakten $K \subset \Omega$. Sei $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ gegeben. Dann ist

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$$

eine reguläre Distributionen, die durch f erzeugte Distribution.

Definition: Mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet man den Raum aller Distributionen auf Ω , versehen mit folgendem Konvergenzbegriff:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T \Leftrightarrow T_n(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

5.1.3 Ableitungen von Distributionen

Vorbetrachtung: Es seien $f \in C^k(a, b)$, $\varphi \in C_o^\infty(a, b)$. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x) dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx.$$

Analog gilt

$$\int_a^b f^{(n)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^n \int_a^b f(x)\varphi^{(n)}(x) dx, \quad 1 \leq n \leq k$$

sowie für $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^k(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (D^\alpha f)(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)D^\alpha \varphi(x) dx, \quad |\alpha| \leq k$$

Diese einfache Betrachtung ist der Schlüssel zu folgender weitreichender Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs:

Definition: Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution und α ein Multiindex. Die Ableitung $T^{(\alpha)}$ von T ist definiert durch das Funktional

$$T^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\varphi^{(\alpha)}).$$

Mit $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ gilt auch $\varphi^{(\alpha)} \in C_o^\infty(\Omega)$, damit ist $T(\varphi^{(\alpha)})$ definiert. Man sieht sofort ein: $T^{(\alpha)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ für alle α . Damit besitzt jede Distribution alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung.

Beispiele 1. $\Omega = \mathbb{R}$, $T = \delta$ ($a = 0$) Diracsche δ -Distribution ($\delta(\varphi) = \varphi(0)$).

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\varphi'(0) \quad T^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Wir wollen nun auch reguläre Distributionen T betrachten.

2. $\Omega = \mathbb{R}$, f ist die *Heaviside-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$T = T_f$, d.h. wie definiert

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx = \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x) dx.$$

Somit gilt für die Ableitung

$$T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_0^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0)$$

da φ kompakten Träger besitzt.

$$\Rightarrow T'_f(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi) \quad \Rightarrow \quad T'_f = \delta$$

“Die Ableitung der Heaviside-Funktion ist δ -Distribution.“ Wie ist dieser letzte Satz zu verstehen? Wir identifizieren die (richtige) Funktion f mit der durch sie erzeugten Distribution T_f . Die distributionelle Ableitung von T_f ist δ . In diesem Sinne gilt $f' = \delta$.

3. $\Omega = \mathbb{R}$, $f \in C^k(\Omega)$, $T = T_f$, $|\alpha| \leq k$

$$T_f^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\varphi^{(\alpha)} dx$$

andererseits:

$$T_{f^{(\alpha)}} = \int_{\Omega} f^{(\alpha)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\varphi^{(\alpha)} dx$$

Folgerung: $T_f^{(\alpha)} = T_{f^{(\alpha)}}$ Die (distributionelle) Ableitung der regulären Distribution T_f ist gerade gleich der Distribution, welche durch $f^{(\alpha)}$ erzeugt wird. Wir können also die distributionelle Ableitung von f mit $f^{(\alpha)}$ identifizieren.

4. $a < c < b$, $\Omega = (a, b)$, $f \in C[a, b]$, Außerdem sei $f \in C^1[a, c]$ und $f \in C^1[c, b]$. Wir bezeichnen die Teilfunktionen mit f_1 bzw. f_2 . $T = T_f$. Dann gilt:

$$T'(\varphi) = -\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = -\left(\int_a^c f_1(x)\varphi'(x) dx + \int_c^b f_2(x)\varphi'(x) dx\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -(f_1(c)\varphi(c) - f_1(a)\varphi(a) - \int_a^c f_1'(x)\varphi'(x) dx \\
&\quad + f_2(b)\varphi(b) - f_2(c)\varphi(c) - \int_a^b f_2'(x)\varphi'(x) dx) \\
&= \int_a^c f_1'(x)\varphi'(x) dx + \int_a^b f_2'(x)\varphi'(x) dx \\
&= \int_a^b f'(x)\varphi'(x) dx
\end{aligned}$$

mit

$$f'(x) = \begin{cases} f_1' & \text{auf } [a, c] \\ f_2' & \text{auf } (c, b] \end{cases}$$

Folgerung: Die distributionelle Ableitung der gegebenen Funktion ist eine reguläre Distribution. Die Ecke von f stört nicht.

Konkretes Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{auf } [0, 1] \\ 2-x & \text{auf } (1, 2] \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } [0, 1] \\ -1 & \text{auf } (1, 2] \end{cases}$$

5. Sei $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^k \bar{\Omega}_i$, $\text{int } \Omega_i \cap \text{int } \Omega_j = \emptyset$, falls $i \neq j$. $f \in C(\bar{\Omega})$, $f|_{\bar{\Omega}_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i)$. Wir setzen $f_i := f|_{\bar{\Omega}_i}$. Ω_i seien Normalgebiete, so dass der Gaußsche Satz anwendbar ist. $T = T_f$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} T_f(\varphi) &= - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx \\
&= - \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) dx \\
&= - \sum_{i=1}^k \left(\int_{\partial \Omega_i} f_i(x) \varphi(x) \cos(n, x) dx - \int_{\Omega_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

Also gilt auch hier wieder $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f(\varphi) = T_{f_{x_j}}(\varphi)$ mit $f_{x_j}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ auf Ω_i . Damit handelt es sich hier erneut um den Fall, dass die distributionelle Ableitung wieder eine reguläre Distribution ist, d.h. durch eine Funktion erzeugt wird.

5.2 Schwache Ableitungen - Sobolevräume

Definition: Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ und α fest. Die Funktion $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt *schwache Ableitung* $w = D^\alpha f$, wenn

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi^{(\alpha)}(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega).$$

Das bedeutet: Die distributionelle Ableitung $T_f^{(\alpha)}$ ist regulär und wird durch die Funktion w erzeugt $T_f^{(\alpha)} = T_w$.

Definition: Sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Unter $W^k_p(\Omega)$ versteht man den Raum aller $f \in L^p(\Omega)$, die alle schwachen Ableitungen $D^\alpha f$ besitzen für $|\alpha| \leq k$ mit $D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Die Räume W^k_p sind Banachräume und werden als *Sobolevräume* bezeichnet. Für unsere Zwecke genügt der Fall $p = 2$, $k = 1$.

Definition: $H^k(\Omega) := W^k_2(\Omega)$. Speziell gilt für $k = 1$

$$\begin{aligned} \|w\|_1^2 &= \int_{\Omega} w^2(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x) dx \\ &= \int_{\Omega} w^2(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla w, \nabla w) dx \\ &= \int_{\Omega} w^2(x) dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \end{aligned}$$

Satz 11 *Durch Einführung des Skalarproduktes*

$$(w, v)_{H^1} = \int_{\Omega} (w(x)v(x) + (\nabla w, \nabla v)) dx$$

wird $H^1(\Omega)$ zu einem (reellen) Hilbertraum.

Den Beweis findet man in verschiedenen Büchern (Nečas, Michlin, Gajewski/Gröger/Zacharias,...). Die anderen H -Räume sind ebenfalls Hilberträume.

Im Raum $H^1(\Omega)$ liegen alle Funktionen aus $L^2(\Omega)$, deren erste schwache Ableitungen sämtlich existieren und wieder zu $L^2(\Omega)$ gehören.

Beispiel $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ (offene Kugel mit Radius 1) Wir betrachten die Funktion

$$u(x) = |x|^{-\lambda}, \quad x \neq 0$$

in Ω . Der Nullpunkt ist eine Menge vom Maß Null, fällt also in L^p -Räumen nicht ins Gewicht. Für welche λ gehört u zu $W_p^1(\Omega)$?

$$D_i u = \frac{-\lambda x_i}{|x|^{\lambda+2}} \Rightarrow |\nabla u| = \frac{|\lambda|}{|x|^{\lambda+1}}$$

Wir bestimmen zunächst die distributionelle Ableitung von u Sei $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$). Dann gilt

$$\int_{\Omega \setminus B(0, \varepsilon)} u D_i \varphi \, dx = \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \varphi \nu_i \, dS + \int_{\partial \Omega} 0 \, dS - \int_{\Omega \setminus B(0, \varepsilon)} \varphi D_i u \, dx$$

Nun weiß man aber, $|x|^{-\alpha} \in L^1(\Omega)$ für $\alpha < n$. Somit gilt $|\nabla u| \in L^1(\Omega)$ für $\lambda + 1 < n$. Damit ist der letzte Term gutartig, d.h. integrierbar in Ω . Für den ersten Term gilt

$$\left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \varphi \nu_i \, dS \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varepsilon^{-\lambda} \, dS \leq c \varepsilon^{n-1-\lambda} \rightarrow 0$$

falls $\lambda + 1 < n$. In diesem Fall folgt also für $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{\Omega} u D_i \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi D_i u \, dx,$$

damit ist die distributionelle Ableitung von u eine reguläre und durch obige Formel gegeben.

In welchem L^p -Raum liegt $|\nabla u|$?

$$|\nabla u| \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow (|x|^{\lambda+1})^p = |x|^{(\lambda+1)p} \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow (\lambda+1)p < n$$

Folgerung: Es muss gelten $\lambda < \frac{n}{p} - 1 = \frac{n-p}{p}$.

$$|x|^{-\lambda} \in W_p^1(\Omega) \Leftrightarrow \lambda < \frac{n-p}{p}$$

Für $p > n$ kann also $|x|^{-\lambda}$ nicht in $W_p^1(\Omega)$ liegen.

Man kann nun weiter zeigen (siehe Evans, 5.2.3 ff.)

- $u \in W_p^k(\Omega) \Rightarrow D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(\Omega)$ ($|\alpha| \leq k$)
- $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}(u)$, $|\alpha| + |\beta| \leq k$
- Ist Ω beschränkt, so liegt $C^\infty(\Omega)$ dicht in $W_k^p(\Omega)$. Präzise: Zu jedem $u \in W_k^p(\Omega)$ gibt es eine Folge von $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W_k^p(\Omega)$ mit $u_m \rightarrow u$ in $W_k^p(\Omega)$
- Ist $\Gamma = \partial\Omega$ von der Klasse C^1 , dann gilt diese Aussage sogar mit $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (alle Ableitungen sind stetig bis zum Rand).

Definition: Mit $W_o^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet man die Abschließung von $C_o^\infty(\Omega)$ in $W_p^k(\Omega)$.

$$u \in W_o^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists u_m \in C_o^\infty(\Omega) : \|u_m - u\|_{W_p^k(\Omega)} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Im gewissen Sinne enthält der Raum $W_o^{k,p}(\Omega)$ genau die $u \in W_p^k(\Omega)$, welche auf dem Rand Γ verschwinden mit allen Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$.
 “ $D^\alpha u = 0$ auf Γ , $\forall |\alpha| \leq k-1$ “

Das wird im Abschnitt Spursätze präzisiert.

Definition: $H_o^k = W_o^{k,2}(\Omega)$ speziell $H_o^1 = W_o^{1,2}(\Omega)$

5.3 Reguläre Gebiete

Die Lösbarkeit von Randwertaufgaben hängt entscheidend davon ab, wie der Rand des Gebietes beschaffen ist, in dem die partielle Differentialgleichung lebt.

Definition: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt einen *regulären Rand* Γ , wenn eine unendliche offene Überdeckung $\{U_i\}$ von Γ , endlich viele offene (beschränkte) Kegel K_i und ein $\varepsilon > 0$ existieren, so dass

- Für jedes $x \in \Gamma$ gibt es ein U_i , so dass $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.
- Jedes $x \in U_i \cap \Omega$ ist Spitze eines Kegels, der ganz in Ω liegt und durch Translation eines der Kegel K_i entsteht.

Diese *Kegelbedingung* geht auf Caldéron zurück.

Lemma 5 Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat genau dann einen regulären Rand Γ , wenn Konstanten $R > 0$, $L > 0$ existieren, so dass Folgendes gilt: Zu jedem x_o existiert $U(x_o)$ welche durch Verschiebung oder Drehung aus der Umgebung

$$U_o = \{y = (y_1, \dots, y_n) \mid \sqrt{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2} < R, |y_n| < 2LR\}$$

hervorgeht, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $y = 0 \in U_o$ geht über in x_o
- (ii) $U(x_o) \cap \Gamma$ entspricht einer Fläche mit der expliziten Darstellung

$$y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1}), |(y_1, \dots, y_{n-1})| < R$$

mit einer lipschitzstetigen Funktion f .

- (iii) $U(x_o) \cap \Omega$ entspricht

$$\{y \in U_o \mid |(y_1, \dots, y_{n-1})| < R, f(y_1, \dots, y_{n-1}) < y_n < 2LR\}$$

Bemerkungen:

- (i) Beschränkte konvexe Gebiet haben reguläre Ränder.
- (ii) Damit kann man auf $U(x_o) \cap \Gamma$ das Lebesguesche Oberflächenmaß ($(n-1)$ -dimensional) definieren

$$\text{mes}(U(x_o) \cap \Gamma) = \int_{|(y_1, \dots, y_{n-1})| < R} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dy_1 \dots dy_{n-1}$$

- (iii) In fast allen Punkten $x \in \Gamma$ existiert der äußere Normalenvektor ν .
- (iv) Der Gaußsche Integralsatz ist anwendbar auf Ω .

Für die später zu beweisenden Spursätze reicht die bisher definierte Regularität von Γ nicht aus.

Definition: Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gehört zur Klasse $C^{k,1}$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), wenn endlich viele lokale Koordinatensysteme S_1, \dots, S_M , Funktionen h_1, \dots, h_M sowie $a, b > 0$ existieren, so dass gilt:

- (i) Alle h_i sind auf dem $(n-1)$ -dimensionalen Würfel

$$\bar{Q}_{n-1} = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \mid |y_i| \leq a, i = 1..n-1\}$$

k -mal stetig differenzierbar mit Lipschitz-stetigen Ableitungen der Ordnung k .

(ii) Zu jedem $P \in \Gamma$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, M\}$, so dass P im Koordinatensystem S_i die Darstellung

$$P = (y, h_i(y)), \quad y \in Q_{n-1}$$

hat.

(iii) Im lokalen Koordinatensystem S_i gilt

$$(y, y_n) \in \Omega \Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{n-1}, \quad h_i(y) < y_n < h_i(y) + b$$

$$(y, y_n) \notin \Omega \Leftrightarrow y \in \bar{Q}_{n-1}, \quad h_i(y) - b < y_n < h_i(y)$$

Bedingung (iii) bedeutet anschaulich, dass das Gebiet nur auf einer Seite vom Rand liegt. Ränder der Klasse $C^{0,1}$ heißen *Lipschitz-Rand*. Ein Gebiet der Klasse $C^{k,1}$ ist regulär. Für $k = 0$ gilt auch die Umkehrung (siehe Gajewski/Gröger/Zacharias).

5.4 Spursätze

Bei unseren elliptischen Randwertaufgaben treten Randbedingungen auf, z.B. $u|_\Gamma = 0$ oder $u|_\Gamma = g$. Was soll aber für $u \in W_p^1(\Omega)$ bedeuten, dass $u = 0$ ist auf Γ ? Auf den ersten Blick erscheint das trivial, auf den zweiten fast unlösbar, denn Γ ist eine Menge vom Maß Null, und auf solchen Mengen kann man Funktionen nicht voneinander unterscheiden. Zum Glück kann man zeigen:

Satz 12 *Es sei Ω beschränkt und Γ ein Lipschitz-Rand. Dann existiert ein linearer und stetiger Operator $T : W_p^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $Tu = u|_\Gamma$ falls $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W_p^1(\Omega)$

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\Gamma)} \leq c\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \quad \forall u \in W_p^1(\Omega)$ wobei $c = c(p, \Omega)$.

Beweis: Wir beweisen den Satz der Einfachheit halber für $p = 2$ und $n = 2$ auf einem Randteil Γ_1 bei dem jeder Randpunkt $P = (x, y)$ in der Form $(x, h(x))$ dargestellt ist. Auf Γ_1 gilt $u(x, y) = u(x, h(x))$, $x \in [a, b]$. Weiter gilt

$$u(x, h(x)) = \int_\tau^h(x) u_y(x, y) + u(x, \tau),$$

$h(x) - \beta \leq \tau < h(x)$. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$|u(x, h(x))| \leq \left(\int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{h(x)-\beta}^{h(x)} 1^2 dy \right)^{1/2} + |u(x, \tau)|$$

Das zweite Integral besitzt den Wert β . Aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$u^2(x, h(x)) \leq 2 \left(\beta \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy + u(x, \tau)^2 \right).$$

Wir integrieren zuerst bezüglich τ :

$$\beta u^2(x, h(x)) \leq 2 \left(\beta^2 \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy + \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u(x, \tau)^2 d\tau \right)$$

und danach bezüglich x

$$\beta \int_a^b u^2(x, h(x)) dx \leq 2 \left(\beta^2 \int_a^b \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u_y^2 dy dx + \int_a^b \int_{h(x)-\beta}^{h(x)} u(x, \tau)^2 d\tau dx \right).$$

Die rechte Seite können wir mit der H^1 -Norm abschätzen

$$\beta \int_a^b u^2(x, h(x)) dx \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Nun müssen wir nur noch die linke Seite zur Norm $\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}$ in Beziehung setzen. Es gilt

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_1)} = \int_a^b u^2(x, h(x)) \sqrt{1 + h'(x)^2} dx \leq K \int_a^b u^2(x, h(x)) dx,$$

da h Lipschitzstetig ist (folgt aus Lipschitz-Rand). Oben eingesetzt ergibt das

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \tilde{c} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Die im Satz postulierte Abbildung T ist gegeben durch

$$u = u(x, y) \mapsto u(x, h(x)).$$

Diese Abbildung ist zunächst für stetige Funktionen u definiert. Unsere Abschätzung zeigt, dass sie stetig auf $H^1(\Omega)$ fortgesetzt werden kann. \square

Beweis für den allgemeinen Fall: siehe Evans.

Definition: Die oben definierte Abbildung $T : W_p^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ heißt *Spuroperator* (T wie trace) und Tu heißt *Spur* von u auf Γ . Kurzbezeichnung: $Tu = u_\Gamma$.

Man sieht sofort ein: Ist u aus $W_o^{1,p}(\Omega)$, dann gilt $u|_\Gamma = 0$. Umgekehrt gilt für C^1 -Ränder Γ

$$u \in W_p^k(\Omega) \wedge u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u \in W_o^{1,p}(\Omega),$$

also folgt eine neue Darstellung für $W_o^{1,p}$,

$$W_o^{1,p}(\Omega) = \{u \in W_p^k(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0\}$$

(Γ Klasse C^1). Beweis: Evans, Adams.

Wie sieht es nun aus bei $W_o^{k,p}(\Omega)$? Unter entsprechender Glattheit von Γ erhält man dann schrittweise, dass alle Ableitungen bis zur Ordnung $(k-1)$ Randwerte besitzen, die sämtlich Null sind.

Leider haben wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht die Zeit, die für die Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen wichtigsten *Einbettungssätze* (stetige Einbettungen, kompakte Einbettungen) zu diskutieren. Beispielsweise ist $W_p^1(\Omega)$ kompakt eingebettet in $L^p(\Omega)$,

$$W_p^1(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega) \quad n \geq 1, 1 \leq p < \infty$$

d.h., jede beschränkte Menge des $W^{1,p}$ ist präkompakt in L^p , falls Ω beschränkt ist und Γ von der Klasse C^1 .

Der Vollständigkeit halber sei hier noch ein allgemeiner Satz über Einbettungen angegeben. Der Beweis und weitere interessante Dinge darüber findet man bei Evans, Kapitel 5.

Satz 13 Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1 -Rand und eine Funktion $u \in W_p^k(\Omega)$.

(i) Gilt

$$k < \frac{n}{p},$$

dann gehört u zu $L^q(\Omega)$ mit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Zusätzlich gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

mit einer Konstante c welche nur von p , k , n und Ω abhängt.

(ii) Gilt

$$k > \frac{n}{p},$$

dann gehört u zu $C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega})$ mit

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{falls } \frac{n}{p} \text{ keine ganze Zahl ist,} \\ \text{eine beliebige reelle Zahl } < 1, & \text{falls } \frac{n}{p} \text{ eine ganze Zahl ist.} \end{cases}$$

Zusätzlich gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega})} \leq c \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

mit einer Konstante c welche nur von p , k , n , γ und Ω abhängt.

Für unsere Zwecke reicht der folgende Satz aus:

Satz 14 (Friedrichsche oder Poincarésche Ungleichung)

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Dann existiert eine Konstante $c = c(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq c \int_{\Omega} \sum_1^n |D_i u|^p dx \quad \forall u \in W_o^{1,p}(\Omega)$$

gilt.

Bemerkungen:

(i) Wesentlich ist die Null bei $W_o^{1,p}(\Omega)$. Für $W_p^k(\Omega)$ kann der Satz nicht richtig sein - man nehme $u \equiv 1$.

(ii) Damit ist die "verkürzte Norm"

$$|u|_{W_o^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_1^n |D_i u|^p dx \right)^{1/p}$$

äquivalent zur natürlichen Norm $\|u\|_{W_o^{1,p}(\Omega)}$. Es gilt nämlich einerseits

$$|u|^p \leq \int_{\Omega} (|u|^p \sum_1^n |D_i u|^p) dx \leq \|u\|^p$$

und andererseits

$$\|u\|^p \leq c \int_{\Omega} \sum_1^n |D_i u|^p dx + \int_{\Omega} \sum_1^n |D_i u|^p dx = (1+c)|u|^p,$$

also

$$|u| \leq \|u\| \leq (1+c)|u|.$$

(iii) Für $p = 2$ schreibt man die Ungleichung kürzer auf

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in H_o^1(\Omega).$$

Beweis: Wir beweisen die Ungleichung für $u \in C_o^\infty(\Omega)$. Die Aussage folgt dann allgemein durch Abschließung. Wir können Ω zwischen zwei parallele Hyperebenen schieben und u außerhalb von Ω mit Null fortsetzen.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$$

$$u(x) = \int_0^{x_n} u_t(x', t) dt$$

Mit Hilfe der Hölderungleichung zeigt man

$$|u(x)|^p \leq x_n^{p-1} \int_0^d |u_t(x', t)| dt.$$

Somit folgt für die Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |u|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^d |u(x)|^p dx_n \right) dx' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d x_n^{p-1} \int_0^d |u_t(x', t)| dt dx_n dx' \\ &= \frac{d^p}{p} \|D_n u\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

woraus man leicht auf die Behauptung schließt. In der letzten Ungleichung sieht man schön, wie Geometriegenschaften von Ω (d) und p in die Konstante eingehen. \square

5.5 Theorie der schwachen Lösungen

5.5.1 Begriff der schwachen Lösung

Wir betrachten hier vor allem Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit gegebener Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und einem Differentialoperator L der Form

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x))D_i u + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_i u + c(x)u$$

mit gegebenen Koeffizientenfunktionen a_{ij} , b_i , c .

Definition: Der oben definierte Differentialoperator L zweiter Ordnung heißt *Operator in Divergenzform*.

Begründung: Mit $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ kann L geschrieben werden als

$$Lu = -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + b \cdot \operatorname{grad} u + cu.$$

Wir setzen im Weiteren o.B.d.A. voraus, dass A symmetrisch ist.

Definition: Der Differentialoperator heißt *gleichmäßig elliptisch in Ω* , wenn eine Konstante $\vartheta > 0$ existiert, so dass

$$\xi^T A(x)\xi \geq \vartheta |\xi|^2$$

gilt $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Kurz: A muß gleichmäßig definit und symmetrisch sein.

Beispiel: $Lu = -\Delta u$ ist gleichmäßig elliptisch

$$A(x) \equiv I \Rightarrow \xi^T A(x)\xi = |\xi|^2, \quad \vartheta = 1.$$

Wir kommen nun zur Motivation schwacher Lösungen von (5.1).

Generelle Voraussetzung: $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty$, $f \in L^2(\Omega)$

Damit dürfen diese Funktionen sehr irregulär sein.

Dazu nehmen wir an, dass u eine klassische Lösung von (5.1) ist, d.h. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche außerdem zu $H^1(\Omega)$ gehört. Wir multiplizieren $Lu = f$ mit einer Funktion $v \in C_o^\infty(\Omega)$ und integrieren.

$$\int_{\Omega} vLu \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x)D_i(a_{ij}D_ju) \, dx &= \int_{\Gamma} v\nu_j a_{ij}D_iu \, dS - \int_{\Omega} a_{ij}D_iuD_jv \, dx \\ &= \int_{\Omega} a_{ij}D_iuD_jv \, dx, \end{aligned}$$

also folgt die Gleichung

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_iuD_jv \, dx + \sum_{i=1}^n b_ivD_iu + cuv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad (5.2)$$

für alle $v \in C_o^\infty(\Omega)$. Da $u \in H^1(\Omega)$ liegen soll, können wir (5.2) ausdehnen auf alle $v \in H_o^1(\Omega)$, und wir erhalten unter Verwendung von A, b kürzer

$$\int_{\Omega} ((\nabla u)^T A \nabla v + b^T \nabla uv + cuv) \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in H_o^1(\Omega). \quad (5.3)$$

Definition: Der Integralausdruck $B : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$B[u, v] = \int_{\Omega} ((\nabla u)^T A \nabla v + b^T \nabla uv + cuv) \, dx$$

stellt die zu L zugeordnete *Bilinearform* dar. Mit (\cdot, \cdot) wollen wir das Skalarprodukt von $L^2(\Omega)$ bezeichnen.

Die Randbedingung von (5.1), $u = 0$ auf Γ , berücksichtigen wir durch Wahl des Raumes $H_o^1(\Omega)$. Dann folgt aus (5.1)

$$u \in H_o^1(\Omega), \quad B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in H_o^1(\Omega). \quad (5.4)$$

(5.4) ist die *Variationsformulierung* von (5.1).

Wir können das noch etwas verallgemeinern. Betrachten wir anstelle von f die rechte Seite $f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i$ mit Funktionen $f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 0..n$, bei denen

die partiellen Ableitungen D_i gar nicht existieren müssen. Dann folgt für $v \in C_o^\infty(\Omega)$ formal

$$(f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i, v) = (f_0, v) + \sum_{i=1}^n (f_i, D_i v).$$

Für $v \in H_o^1(\Omega)$ gilt $D_i v \in L^2(\Omega)$ und man sieht, dass rechts ein lineares und stetiges Funktional f auf $H_o^1(\Omega)$ steht

$$f(v) = (f_0, v) + \sum_{i=1}^n (f_i, D_i v).$$

f ist damit Element des dualen Raumes von $H_o^1(\Omega)$.

Definition: Den dualen Raum zu $H_o^1(\Omega)$ bezeichnet man als $H^{-1}(\Omega)$. Wir schreiben $\langle f, v \rangle$ für $f(v)$.

Bemerkung: Der Raum $H^{-1}(\Omega)$ ist der Dualraum zu $H_o^1(\Omega)$, wenn man die Funktionale wie oben beschreibt. Bezüglich der $H^1(\Omega)$ -Skalarproduktbeschreibung der Funktionale ist der Raum ein Hilbertraum und damit zu sich selbst dual. Die Wirkungsweise der Funktionale spielt also eine wichtige Rolle.

Wir betrachten nun anstelle von (5.1) die etwas allgemeinere Aufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (5.5)$$

Definition: Eine Funktion $u \in H_o^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (5.5), wenn gilt

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

für alle $v \in H_o^1(\Omega)$.

Bemerkung: Homogene Randwerte sind sehr speziell. Bei Randbedingungen der Form

$$u|_\Gamma = g$$

versucht man, ein $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ zu finden mit $\bar{u}|_\Gamma = g$ und macht dann den Ansatz $u = z + \bar{u}$ mit $z \in H_o^1(\Omega)$. Das ergibt

$$Lu = L\bar{u} + Lz = f$$

oder

$$\begin{aligned}Lz &= \tilde{f} \\ z|_{\Gamma} &= 0\end{aligned}$$

mit $\tilde{f} = f - L\bar{u}$.

Beispiel: Gesucht ist die schwache Formulierung der Aufgabe

$$\begin{aligned}-\Delta u &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ u|_{\Gamma} &= 1\end{aligned}$$

im Gebiet $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ und $f = f(x, y) \in L^\infty(\Omega)$ ist gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x, y) \in (0.5, 1) \times (0, 0.5) \text{ oder } (x, y) \in (0, 0.5) \times (0.5, 1) \\ 0 & \text{falls } (x, y) \in (0, 0.5) \times (0, 0.5) \text{ oder } (x, y) \in (0.5, 1) \times (0.5, 1) \end{cases}$$

Offenbar ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ keine reguläre Distribution !

Mit Hilfe der Funktion $\bar{u} \equiv 1$ ($u = z + \bar{u}$) führen wir das Problem auf homogene Randdaten zurück.

$$\begin{aligned}-\Delta z &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ z|_{\Gamma} &= 0\end{aligned}$$

In Variationsform sieht das Ganze dann so aus: $z \in H_o^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (-\Delta z)v \, dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} v \, dx \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial \nu} \, dS + \int_{\Omega} (\nabla z, \nabla v) \, dx &= - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \quad \forall v \in H_o^1(\Omega)\end{aligned}$$

Der erste Term ist Null. Also lautet die schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} (\nabla z, \nabla v) \, dx = - \int_{\Omega} f \cdot v_x \, dx \quad \forall v \in H_o^1(\Omega).$$

Es dürfte klar sein, dass eine klassische Lösung der obigen Aufgabe auf keinen Fall erwartet werden kann, wohl aber eine schwache, wie wir sehen werden.

5.5.2 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Grundlegend für die Beantwortung der Existenzfrage ist der bekannte

Satz 15 (*Lax-Milgram*) *Es sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und Norm $\|\cdot\|$ und $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform die folgende Eigenschaften hat:*

(i) $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$ (*Stetigkeit bzw. Beschränktheit*)

(ii) $B[u, u] \geq \beta \|u\|^2$ (*Koerzitivität*)

Dabei sind α und β positive Konstanten. Ist $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares und stetiges Funktional, so existiert genau ein $u \in H$, welches die Variationsgleichung

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

löst.

Beweis: Steht in jedem guten Buch über schwache Lösungen elliptischer Gleichungen und in Standardwerken der Funktionalanalysis. Daher verzichten wir darauf und verweisen auf die schöne Darstellung in Evans. Ist B symmetrisch, $B[u, v] = B[v, u]$, dann ist der Beweis sehr einfach. Dann ist $((u, v)) = B[u, v]$ ein neues Skalarprodukt in H , dessen Norm zu $\|\cdot\|$ äquivalent ist. Dann gibt es nach dem Satz von Riesz genau ein $u \in H$, so dass

$$((u, v)) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H$$

gilt. □

Diesen Satz wollen wir nun auf unsere konkrete Bilinearform

$$B[u, v] = (A \nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u, v) + (cu, v) \quad (5.6)$$

anwenden. Dazu wählen wir $H = H_o^1(\Omega)$ mit der natürlichen Norm von H_o^1 .

Lemma 6 (*Energieabschätzungen*) *Für die in (5.6) definierte Bilinearform B existieren $\alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0$, so dass*

(i) $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H_o^1(\Omega)} \|v\|_{H_o^1(\Omega)}$

(ii) $B[u, u] \geq \beta \|u\|_{H_o^1(\Omega)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Beweis: (i)

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)| &\leq |(A\nabla u, \nabla v)| + |(b \cdot \nabla u, v)| + |(cu, v)| \\
 &\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
 &\quad + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
 &\leq \alpha \|u\|_{H_o^1(\Omega)} \|v\|_{H_o^1(\Omega)}
 \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Elliptizität gilt

$$(A\nabla u, \nabla u) \geq \vartheta |\nabla u|^2.$$

Daher folgt

$$B[u, u] \geq \vartheta \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} - \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2$$

Den zweiten Term schätzen wir mit Hilfe der Youngschen Ungleichung ($ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$) ab

$$\|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Wir erhalten zunächst

$$B[u, u] \geq (\vartheta - \varepsilon \|b\|_{L^\infty}) \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C \|u\|_{L^2}^2$$

und daraus

$$B[u, u] \geq \beta \|u\|_{H_o^1}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

falls ε hinreichend klein ist. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz 16 (*Existenzsatz*) *Es existiert ein $\gamma \geq 0$, so dass für jedes $\mu \geq \gamma$ und jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in H_o^1(\Omega)$ für die Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned}
 Lu + \mu u &= f && \text{in } \Omega \\
 u &= 0 && \text{auf } \Gamma
 \end{aligned}$$

existiert.

Bemerkung: Gleiches gilt für $f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i$ mit $f_j \in L^2(\Omega)$ anstelle von f .

Anwendung auf den Fall der Poisson-Gleichung

Im Fall $Lu = -\Delta u$ lässt sich die Kombination der beiden letzten Sätze noch leichter anwenden. Wir betrachten hier

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Hier gilt

$$B[u, u] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = |u|_{H_o^1(\Omega)}^2$$

mit der verkürzten Norm $|\cdot|$ von H_o^1 . Folgerung:

Die Poissongleichung besitzt für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_o^1(\Omega)$.

Gleiches gilt wieder für

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Die bereits vor einigen Seiten als Beispiel angegebene Aufgabe im Einheitsquadrat

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ u|_{\Gamma} &= 1 \end{aligned}$$

hat genau eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Betrachtung der Differenz zweier verschiedener Lösungen ...

5.5.3 Eigenwerte

Das Lösungsverhalten von elliptischen Gleichungen in Divergenzform kann mit Hilfe der Fredholm-Theorie detailliert beschrieben werden. Wir werden das hier nur skizzieren.

Zunächst führen wir den zu L formal adjungierten Differentialoperator ein:
Seien $u, v \in H_o^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
(Lu, v) &= B[u, v] \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u D_j v \, dx + \int_{\Omega} v \sum_{i=1}^n b_i D_i u \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx \\
&= - \int_{\Omega} u \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j v) \, dx - \int_{\Omega} u \sum_{i=1}^n D_i (b_i v) \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx \\
&= - \int_{\Omega} u \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j v) \, dx - \int_{\Omega} u \sum_{i=1}^n b_i D_i v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} u v \sum_{i=1}^n D_i b_i \, dx \\
&= (L^* v, u)
\end{aligned}$$

Definition Der Differentialoperator L^* ,

$$L^* v = - \sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij} D_j v) - \sum_{i=1}^n b_i D_i v + (c - \sum_{i=1}^n D_i b_i) v$$

nennt man zu L *formal adjungiert*. Gilt $L^* = L$, so heißt L *formal selbstadjungiert*.

Da $a_{ij} = a_{ji}$ vorausgesetzt ist, tritt formale Selbstadjungiertheit für $b = 0$ ein. Wir setzen $L_{\gamma} = L + \gamma I$, d.h.

$$L_{\gamma} u = Lu + \gamma u.$$

Nach Satz 16 hat die Gleichung

$$L_{\gamma} u = f$$

in $H_o^1(\Omega)$ genau eine Lösung u . Mit einfachen Abschätzungen folgt

$$\|u\|_{H_o^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Damit ist die Abbildung $f \mapsto u$ linear und stetig von $L^2(\Omega)$ in $H_o^1(\Omega)$. Wir setzen

$$u = L_{\gamma}^{-1} f \quad L_{\gamma}^{-1} : L^2 \rightarrow H_o^1.$$

Nun interessieren wir uns aber nicht für die Gleichung $L_\gamma u = f$, sondern für $Lu = f$. Es gilt

$$\begin{aligned} Lu &= f \\ Lu + \gamma u &= \gamma u + f \\ u &= L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) \\ u &= \gamma L_\gamma^{-1}u + L_\gamma^{-1}f \\ &= Ku + f \end{aligned}$$

Wegen der stetigen Einbettung von $H^1_O(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ können wir $K = L_\gamma^{-1}$ als Operator von L^2 in L^2 auffassen und erhalten die transformierte Gleichung

$$u - Ku = h \tag{5.7}$$

Die Einbettung von $H^1_O(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ist aber nicht nur stetig, sondern sogar kompakt. Deswegen ist K ein *kompakter Operator* in L^2 . Deshalb kann man auf (5.7) die Theorie der *Fredholm-Operatoren* anwenden. Diese besagt unter anderem, dass entweder (5.7) für alle rechten Seiten h genau eine Lösung hat, welche stetig von h abhängt oder die homogene Gleichung

$$u - Ku = 0$$

nichttriviale Lösungen besitzt.

Definition: $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von K , wenn die Gleichung

$$Ku = \lambda u$$

nichttriviale Lösungen besitzt. Ist K selbstadjungiert, d.h. $K = K^*$ in $L^2(\Omega)$, $(Ku, v) = (u, Kv)$, dann besitzt K abzählbar viele Eigenwerte mit folgenden Eigenschaften:

- alle Eigenwerte sind reell
- sie lassen sich der Größe nach ordnen:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

- 0 ist einziger Häufungspunkt.

Nun gilt $Ku = \lambda u$ genau dann, wenn $\gamma L_\gamma^{-1}u = \lambda u$ gilt. Somit folgt

$$\frac{\gamma}{\lambda}u = L_\gamma u$$

und $\mu_i = \frac{\gamma}{\lambda_i}$ ist Eigenwert von L . Aus $|\lambda_i| \rightarrow 0$ folgt $|\mu_i| \rightarrow \infty$.

Definition: $\mu \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert von L , wenn $Lu = \mu u$ in $H_o^1(\Omega)$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Satz 17 *Ist L formal selbstadjungiert und elliptisch, dann hat L abzählbar viele Eigenwerte μ_i mit $\mu_i \rightarrow \infty$ falls $i \rightarrow \infty$. Ist μ kein Eigenwert von L , dann ist das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} Lu - \mu u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

in $H_o^1(\Omega)$ eindeutig lösbar, und die Lösung hängt stetig von f ab:

$$\|u\|_{H_o^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Bemerkung: Gleiches gilt wieder für $Lu - \mu u = f_0 - \sum_{i=1}^n D_i f_i$. Auch hier gilt

$$\|u\|_{H_o^1(\Omega)} \leq c(\|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}).$$

Man kann auch gleich $Lu - \mu u = f$ mit $f \in H^{-1}(\Omega)$ betrachten und erhält

$$\|u\|_{H_o^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

5.5.4 Andere Randbedingungen

Bisher waren unsere Aufgaben mit homogener Dirichletscher Randbedingung gegeben. Wir wollen nun anhand von ausgewählten anderen Aufgaben noch weitere Möglichkeiten kennenlernen.

1. Poisson-Gleichung und Randbedingung 3. Art

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u &= g && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dabei seien die Funktionen $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ und $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ gegeben. Für die Überführung dieser Gleichung in die Variationsformulierung müssen wir die Gleichung mit einer Testfunktion aus H^1 (nicht $H_0^1(\Omega)$!) multiplizieren.

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx \\ - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx \\ - \int_{\Gamma} (g - \alpha u) v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx \end{aligned}$$

Wir sortieren noch um

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha u v \, dS = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, dS \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.9)$$

Definition: $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (5.8), wenn (5.9) für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Spezialfall: $\alpha \equiv 0$ Es ergibt sich das *Neumann-Problem*,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, dS.$$

Stellen wir nun die Beziehung zur allgemeinen funktionalanalytischen Form her:

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha u v \, dS \quad B : H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, dS \quad F : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

F ist linear und stetig und ist folglich Element des Dualraums $H^1(\Omega)^*$.

$$B[u, v] = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Kann man von (5.9) auf (5.8) schließen? Dazu sei u eine schwache Lösung. Außerdem sei $u \in H^2(\Omega)$ bekannt. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx$$

und wir können (5.9) umsortieren zu

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS + \int_{\Gamma} \alpha u v \, dS - \int_{\Gamma} g v \, dS$$

oder

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v \, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v + \alpha u - g \right) dS = 0.$$

Beide Gleichungen müssen für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt sein. Also gelten sie speziell für $v \in H_o^1(\Omega)$. Dort fallen die Randterme weg und wir erhalten

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_o^1(\Omega).$$

Damit ist die Poisson-Gleichung $-\Delta u - f = 0$ (im Sinne schwacher Ableitungen) erfüllt. Außerdem folgt

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v + \alpha u - g \right) dS = 0. \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Man kann zeigen, dass die Randwerte $v|_{\Gamma}$ aller $H^1(\Omega)$ -Funktionen im Raum $L^2(\Gamma)$ dicht liegen. Deshalb ist auch die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} v + \alpha u = g$$

erfüllt.

2. Poissongleichung mit gemischter Randbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u &= g && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dabei seien die Funktionen $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_2)$ und $\alpha \in L^\infty(\Gamma_2)$ gegeben. Außerdem sollen Die Γ_i disjunkt und meßbar sein mit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. Der geeignete Raum für die Testfunktionen ist in diesem Fall

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}.$$

Die Überführung in die Variationsformulierung erfolgt völlig analog zu der von (5.8), nur fällt jetzt der Term $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS$ weg. Wir erhalten

$$B[u, v] = F(v) \quad \forall v \in V \quad (5.11)$$

mit

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha uv \, dS$$

und

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, dS.$$

3. Gleichung in Divergenzform (5.1)

Wir betrachten nochmals (5.1), $Lu = f$ in Ω , aber jetzt mit passender Randbedingung 3. Art. Die Gleichung lautete

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + b \cdot \operatorname{grad} u + cu = f.$$

Wir multiplizieren mit $v \in H^1(\Omega)$ und erhalten mit partieller Integration

$$-\int_{\Gamma} v(A \nabla u, \nu) \, dx + \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla v) \, dx + \int_{\Omega} v(b, \nabla u) \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

bzw.

$$-\int_{\Gamma} v(\nabla u, A^T \nu) \, dx + \int_{\Omega} (\nabla v \cdot A \nabla u + vb \cdot \nabla u + cuv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Den Term $\nabla u \cdot A^T \nu$ sollte man daher auf dem Rand vorgeben, anstelle von $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u$, falls $A \neq I$.

Definition: Der Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = A^T \nu \cdot \nabla u = \nu \cdot A \nabla u$$

heißt Konormalenableitung von u auf Γ .

Eine sinnvolle Randbedingung ist daher

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u = g.$$

Somit betrachten wir die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + b \cdot \operatorname{grad} u + cu &= f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u &= g & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (5.12)$$

und erhalten als Variationsformulierung

$$B[u, v] = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (5.13)$$

mit

$$B[u, v] = \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla v) \, dx + \int_{\Gamma} \alpha uv \, dS + \int_{\Omega} (vb \cdot \nabla u + cuv) \, dx$$

und

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, dS.$$

Definition: Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$, welche (5.13) erfüllt, heißt schwache Lösung von (5.12).

Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen von 1.-3.

Wir behandeln exemplarisch (5.12). Nach dem Satz von Lax-Milgram reicht dazu der Nachweis von:

$$|B[u, v]| \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1 \quad (5.14)$$

$$B[v, v] \geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{mit } \beta > 0 \quad \forall u \in H^1 \quad (5.15)$$

(5.14) haben wir schon im Beweis von Lemma 6 gezeigt. Neu ist lediglich der Term mit dem Randintegral. Hier helfen uns aber die Spursätze. (5.15) macht aber wirklich Probleme. Wir betrachten hier nur den Fall $b = 0$:

$$\begin{aligned} B[u, u] &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot A \nabla u + \int_{\Gamma} \alpha u^2 \, dS + \int_{\Omega} cu^2 \, dx \\ &\geq \vartheta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma} \alpha u^2 \, dS + \int_{\Omega} cu^2 \, dx \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fall 1: (einfachster Fall) $\alpha \geq 0$ und $c(x) \geq c_o > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} B[u, u] &\geq \vartheta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + c_o \int_{\Omega} u^2 \, dx \\ &\geq \min(\vartheta, c_o) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) \, dx \\ &\geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Fall 2: (etwas schwieriger) $\alpha(x) \geq \alpha_o > 0$ und $c(x) \geq 0$

Dann folgt:

$$B[u, u] \geq \vartheta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha_o \int_{\Gamma} u^2 dS \quad (5.18)$$

Uns fehlt der Term $\int_{\Omega} u^2 dx$. Hier hilft die Friedrichsche Ungleichung:

Lemma 7 (Friedrichsche Ungleichung) Ω habe einen Rand der Klasse $C^{0,1}$, $\Gamma_o \subset \Gamma$ habe positives Maß. Dann existiert eine positive Konstante c , so dass gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \left(\int_{\Gamma_o} u(x)^2 dS + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (5.19)$$

Mehr dazu findet man im Buch von Casas S.216. Nun kann die gewünschte Abschätzung leicht erhalten werden: Wir wenden die Friedrichsche Ungleichung (5.19) auf (5.18) an und setzen fort

$$\begin{aligned} B[u, u] &\geq \min(\vartheta, \alpha_o) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma} u^2 dx \right) \\ &\geq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Insgesamt sind mit den Ungleichungen (5.17) und (5.20) in beiden Fällen die Voraussetzungen für den Satz von Lax-Milgram erfüllt, und wir haben als Folgerung den

Satz 18 In jedem der Fälle

- (i) $\alpha(x) \geq 0$, $c(x) \geq c_o > 0$
- (ii) $\alpha(x) > \alpha_o > 0$, $c(x) \geq 0$

besitzt die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A \operatorname{grad} u) + cu &= f \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u &= g \end{aligned}$$

bei gegebenen $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$. Dabei gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Bemerkung: Wegen (5.19) gilt Gleiches für die gemischte Randbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u &= g && \text{auf } \Gamma \setminus \Gamma_o \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_o \end{aligned}$$

falls das Maß von Γ_o positiv ist.

5.5.5 Erweiterungen

Die von uns behandelten elliptischen Differentialgleichungen waren Gleichungen 2. Ordnung. Für deren schwache Lösung haben wir aber nur die Existenz der ersten (schwachen) Ableitung vorausgesetzt. Da man andererseits aus der klassischen Theorie bei hinreichend glatten Daten Lösungen aus $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ kennt, stellt sich die Frage, ob die schwachen Lösungen in Wirklichkeit nicht glatter als nur $H^1(\Omega)$ sind. Das ist die Frage nach der *Regularität schwacher Lösungen*. In der Tat kann man bei hinreichend glatten Daten A, b, c, f, g, Γ zeigen, dass $u \in H^2(\Omega)$ bzw. sogar $u \in C^2(\Omega)$ (oder noch höhere Regularität) liegt, siehe Evans Kapitel 6.3.

Das Maximumprinzip für elliptische Gleichungen haben wir bisher für den Spezialfall des Laplace-Operators kennengelernt,

$$Lu = -\Delta u.$$

Man kann bei hinreichend glatten Daten das Maximumprinzip auch beweisen für den Fall

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D^i D^j u + \sum_{i=1}^n b_i D^i u$$

sowie unter Zusatzvoraussetzungen auch den Fall

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D^i D^j u + \sum_{i=1}^n b_i D^i u + cu$$

behandeln. Mehr dazu steht im Kapitel 6.4 bei Evans. Zu empfehlen ist aber auch das Standardwerk zu Maximumprinzipien: Protter/Weinberger.

Kapitel 6

Die Finite-Elemente-Methode (FEM)

6.1 Approximation von Funktionen einer oder zweier Veränderlicher durch Basisfunktionen

Digitale Technik kann keine stetigen Funktionen insgesamt verarbeiten, sondern nur endlich viele Zahlenwerte. Also muss man Funktionen sinnvoll durch endlich viele Werte annähern. Sehr einfach ist dies bei Funktionen einer reellen Veränderlichen.

$$h = \frac{b-a}{M} \quad x_i = i \cdot h + a \quad i = 0, \dots, M \quad u_i = u(x_i)$$

Wir ersetzen die Funktion u durch den Polygonzug durch die Stützstellen. Es gilt

$$u_h(x) = u(x_i) + \frac{x - x_i}{h} \cdot (u(x_{i+1}) - u(x_i)) \quad \text{falls } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Man kann dies aber auch anders darstellen. Dazu führt man die Basisfunktionen w_i

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{in } x_i \\ \text{stetig, linear} & \text{in } [x_{i-1}, x_i] \text{ bzw. } [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt offenbar

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^M u_i w_i(x) \quad u_i \text{ wie oben}$$

Vorteil: Alle diese Funktionen haben die gleiche Gestalt und nur einen lokalen Träger.

Wir können diese Idee ohne Probleme ins 2-Dimensionale übertragen. Auch hier wollen wir einen Ansatz mit stückweise linearen Funktionen des Typs

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^M u_i w_i(x).$$

betrachten. Die u_i sind wieder die Werte in den Gitterpunkten. Wir müssen nur noch erklären, wie die Ansatzfunktionen w_i genau definiert sind. Zur Demonstration der Grundkonstruktion sei Ω ein Quadrat. Wir zerlegen dieses Quadrat in Teilquadrate, indem wir jede Quadratseite in M Teilstücken teilen:

$$x_\nu = \nu \cdot h \quad y_\mu = \mu \cdot h \quad \nu, \mu = 1..M - 1.$$

Mit $\Omega_{\nu\mu}$ bezeichnen wir nun ein sechseckiges Gebiet mit den Mittelpunkt (x_ν, y_μ) . Die Eckpunkte dieses Sechsecks sind $(x_{\nu-1}, y_{\mu-1})$, $(x_\nu, y_{\mu-1})$, $(x_{\nu+1}, y_\mu)$, $(x_{\nu+1}, y_{\mu+1})$, $(x_\nu, y_{\mu+1})$ und $(x_{\nu-1}, y_\mu)$ (siehe Skizze). Durch Verbindung des Mittelpunktes mit den Eckpunkten entstehen sechs Teildreiecke.

Wir fordern nun für die Ansatzfunktionen $\varphi_{\nu\mu}(x, y)$

1. Die Funktion sei linear in jedem Teildreieck.
2. Die Werte in den Gitterpunkten seien gegeben durch

$$\varphi_{\nu\mu}(x_k, y_l) = \begin{cases} 1 & k = \nu, l = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus, dass $\varphi_{\nu\mu}(x, y) = 0$ gilt außerhalb von $\Omega_{\nu\mu}$, d.h. diese Funktionen haben wieder lokalen Träger.

Formeln für die Ansatzfunktionen $\varphi_{\nu\mu}$:

Im Dreieck 1: Prinzipiell gilt $\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ Offenbar gilt: $\alpha_1 = D_x \varphi$ und $\alpha_2 = D_y \varphi$. Im Dreieck 1 gilt $D_x \varphi = 0$ und $D_y \varphi = 1/h$, also ergibt sich

$$\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 + \frac{1}{h} y$$

Für $y = \mu \cdot h$ folgt

$$1 = \alpha_0 + \frac{1}{h} \cdot \mu \cdot h \Rightarrow \alpha_0 = 1 - \mu$$

$$\varphi_{\nu\mu} = 1 - \mu + \frac{1}{h}y = 1 + \left(\frac{y}{h} - \mu\right)$$

Dreieck 2: $D_y\varphi = -1/h$ $D_x\varphi = 1/h$

$$\varphi_{\nu\mu} = \alpha_0 - \frac{1}{h}x + \frac{1}{h}y$$

Damit gilt hier speziell

$$1 = \alpha_0 - \nu + \mu$$

und damit

$$\varphi_{\nu\mu} = 1 + \nu - \mu - \frac{1}{h}x + \frac{1}{h}y = 1 - \left(\frac{x}{h} - \nu\right) + \left(\frac{y}{h} - \mu\right).$$

Analog berechnet man bei den anderen Dreiecken.

$$\varphi_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{h} - \mu\right) & \text{Dreieck 1} \\ 1 - \left(\frac{x}{h} - \nu\right) + \left(\frac{y}{h} - \mu\right) & \text{Dreieck 2} \\ 1 - \left(\frac{x}{h} - \nu\right) & \text{Dreieck 3} \\ 1 - \left(\frac{y}{h} - \mu\right) & \text{Dreieck 4} \\ 1 + \left(\frac{x}{h} - \nu\right) - \left(\frac{y}{h} - \mu\right) & \text{Dreieck 5} \\ 1 + \left(\frac{x}{h} - \nu\right) & \text{Dreieck 6} \end{cases}$$

Wir haben nun die gewünschten Basisfunktionen konstruiert, und zwar insgesamt $N = (M-1)^2$ viele. Der Ansatz ist also hier

$$u(x, y) = \sum_{\nu, \mu=1}^{M-1} u_{\nu\mu} \varphi_{\nu\mu}(x, y).$$

Bemerkung: Dieser Ansatz führt nur auf Funktionen mit homogenen Randwerten.

Es gilt:

- (i) $\varphi_{\nu\mu} \in H_o^1(\Omega) \quad \forall \nu, \mu$ (siehe Beispiel 5 im Abschnitt 5.1)
- (ii) $\varphi_{\nu\mu}$ linear unabhängig von φ_{ij} , falls $i \neq \nu$ oder $j \neq \mu$
- (iii) $V_h = \text{span}\{\varphi_{\nu\mu}\}$ hat Dimension $(M_1)^2$

V_h ist ein endlichdimensionaler Teilraum von $V = H_o^1(\Omega)$.

6.2 Grundzüge der FEM

Alle unsere Randwertaufgaben führten auf das Problem

$$B[u, v] = f(v) \quad \forall v \in V. \quad (V \subset H^1(\Omega)) \quad (6.1)$$

Bei der FEM geht man so vor: $V_h \subset V$ sei endlichdimensionaler Teilraum, der in gewisser Hinsicht vom “Diskretisierungsparameter“ h abhängig ist. Bei den Ansatzfunktionen aus Abschnitt 6.1 wäre dies die Gitterweite. Wir wählen nun einen Ansatz für u

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i w_i$$

wobei $\{w_1, \dots, w_N\}$ eine Basis von V_h ist. Zu hart wäre nun die Forderung

$$B[u_h, v] = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Sinnvoll ist dagegen

$$B[u_h, v_h] = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Dann stimmen nämlich die Dimensionen überein.

Definition: Die Aufgabe $u_h \in V_h$,

$$B[u_h, v_h] = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.2)$$

heißt das zu (6.1) gehörige *diskrete Problem*.

Wir kommen nun zur Umformung von (6.2). Wir verwenden dabei als *Testfunktionen* v_h die Basisfunktionen w_i von V_h

$$B[u_h, w_i] = f(w_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Jede Lösung dieses Systems ist offenbar auch Lösung von (6.2). Wir setzen nun unseren Ansatz für u_h ein

$$B\left[\sum_{j=1}^N u_j w_j, w_i\right] = f(w_i) \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

woraus

$$\sum_{j=1}^N u_j B[w_j, w_i] = f(w_i) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

folgt. Wir setzen nun

$$a_{ij} = B[w_j, w_i], \quad f_i = f(w_i)$$

und erhalten

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

In Matrixschreibweise sieht das einfacher aus

$$A_h \underline{u} = \underline{f},$$

wobei A die Matrix mit den Elementen a_{ij} ist und \underline{u} bzw. \underline{f} die Vektoren mit Elementen u_i bzw. f_i sind. Wir haben damit die Aufgabe auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems reduziert.

Anwendung der Methode

- Ansatzraum V_h wählen
- System $A_h \underline{u} = \underline{f}$ aufstellen, d.h. A_h und \underline{f} berechnen.
- System lösen ... $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i w_i(x)$

Anwendung auf die erste Randwertaufgabe im Einheitsquadrat

Wir verwenden die eingeführten "Hütchenfunktionen" $\varphi_{\nu\mu}$. Außerdem gilt

$$B[u, v] = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) \, dx dy = \int_{\Omega} \{u_x v_x + u_y v_y\} \, dx dy$$

Damit gilt für die Basisfunktionen

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \right\} \, dx dy.$$

Klar ist

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = 0 \quad \text{falls } \Omega_{\nu\mu} \cap \Omega_{kl} = \emptyset.$$

Aber es gibt ja noch viele andere Fälle. Die beiden Gebiete können identisch sein oder sich teilweise überschneiden. Wir erhalten:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy = \begin{cases} 2 & k = \nu & l = \mu \\ -1 & k = \nu + 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu + 1 & l = \mu + 1 \\ 0 & k = \nu & l = \mu + 1 \\ -1 & k = \nu - 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu - 1 & l = \mu - 1 \\ 0 & k = \nu & l = \mu - 1 \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} dx dy = \begin{cases} 2 & k = \nu & l = \mu \\ 0 & k = \nu + 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu + 1 & l = \mu + 1 \\ -1 & k = \nu & l = \mu + 1 \\ 0 & k = \nu - 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu - 1 & l = \mu - 1 \\ -1 & k = \nu & l = \mu - 1 \end{cases}$$

$$B[\varphi_{\nu\mu}, \varphi_{kl}] = \begin{cases} 4 & k = \nu & l = \mu \\ -1 & k = \nu + 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu + 1 & l = \mu + 1 \\ -1 & k = \nu & l = \mu + 1 \\ -1 & k = \nu - 1 & l = \mu \\ 0 & k = \nu - 1 & l = \mu - 1 \\ -1 & k = \nu & l = \mu - 1 \end{cases}$$

Wir rechnen hier als Beispiel vor: $k = \nu$, $l = \mu$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy = \sum_{i=1}^6 \int_{K_i} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy.$$

In den Dreiecken K_1 und K_4 gilt $\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = 0$. In den anderen Dreiecken war jeweils $\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = \pm \frac{1}{h}$. Also ergibt sich insgesamt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy = \sum_{2,3,5,6} \int_{K_i} \frac{1}{h^2} dx dy = 4 \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = 2.$$

Nehmen wir noch den Fall: $k = \nu + 1$, $l = \mu$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy = \int_{K_2} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy + \int_{K_3} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy$$

Hier gilt

$$\frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} = \frac{1}{h},$$

also

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_{\nu\mu}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} dx dy = 2 \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) \cdot \frac{h^2}{2} = -1.$$

Analog rechnet man in den anderen Fällen.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Problem:

Um die Matrix A_h aufstellen zu können, müssen wir die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}$ durchnummerieren von 1 bis $(M-1)^2$. Je nachdem, wie wir dies tun, wird die Matrix A_h eine mehr oder weniger komplizierte Gestalt haben. Um diese Dinge in den Griff zu bekommen, muss man aber etwas mehr Aufwand treiben.

Stark vereinfachtes Beispiel:

Wir vernetzen Ω so grob, dass ein direktes Durchrechnen ohne weitere Kenntnisse gerade noch möglich ist. Dazu verwenden wir 4 innere Knoten und haben also 4 Basisfunktionen:

$$w_1 = \varphi_{11}, \quad w_2 = \varphi_{21}, \quad w_3 = \varphi_{22}, \quad w_4 = \varphi_{12}$$

Zu berechnen haben wir die Matrix A_h . Die Formeln dazu haben wir schon bereit gestellt. Demnach stehen auf der Hauptdiagonalen lauter Vieren. Bei den Elementen a_{14} und a_{22} haben wir den Fall $k = \nu$, $l = \mu + 1$. Laut unserer Tabelle ergibt sich der Wert -1 . a_{24} ist Null, da der gemeinsame Träger die leere Menge ist. a_{13} ist der Fall $k = \nu + 1$, $l = \mu + 1$. Hier ergibt sich ebenfalls der Wert Null. Bleibt noch a_{12} und a_{34} . Diese stellen die Fälle $k = \nu + 1$, $l = \mu$ und $k = \nu - 1$, $l = \mu$ dar. Beide liefern den Wert -1 . Zusammengefasst erhalten wir

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Gegeben sei außerdem die rechte Seite $f \equiv 1$ in Ω . Wir müssen noch die Elemente f_i des Vektors \underline{f} berechnen:

$$f_i = \int_{\Omega} f(x, y) w_i(x, y) \, dx dy = \int_{\Omega} w_i(x, y) \, dx dy$$

Dieser Ausdruck ist aber gerade das Volumen des Hütchens. Die Grundfläche besteht aus 6 Dreiecken mit Flächeninhalt $h^2/2$. Die Höhe der Pyramide ist 1. Nach der Formel $V_p = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche}$ erhalten wir

$$f_i = V_p = 6 \cdot \frac{h^2}{6} = h^2.$$

und damit das folgende Gleichungssystem für \underline{u} :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In unserem Fall ist $h = 1/3$, also steht rechts im Vektor immer $1/9$. Offenbar muss die Lösung total symmetrisch sein. Man erhält also die Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1/18$ und damit das Ergebnis

$$u_h(x, y) = \frac{1}{18}(w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y) + w_4(x, y)).$$

In der Übung werden wir noch auf das Lemma von Céa eingehen.

Kapitel 7

Parabolische Differentialgleichungen

7.1 Das erste Randwertproblem und das Maximumprinzip

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitgleichung in einem krummlinig berandeten Viereck: $\varphi_1 < \varphi_2$ stetig;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in } (x, t) \in G. \quad (7.1)$$

$$u(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma \quad (7.2)$$

Dabei sei

$$\Gamma = \{(x, t) | t = t_0\} \cup \{(x, t) | x = \varphi_1(t)\} \cup \{(x, t) | x = \varphi_2(t)\}.$$

Außerdem sei f stetig, d.h. wir fordern die Verträglichkeit der Randbedingungen mit den Anfangsbedingungen.

Satz 19 *Sei u Lösung von (7.1), stetig auf \bar{G} . Dann nimmt u sein Minimum und Maximum auf Γ an, also auf der Grundlinie $t = t_0$ oder auf den seitlichen Begrenzungen von G .*

Beweis: Nach Priwalow. Wir nehmen das Maximum. Sei

$$\begin{aligned} M &= \max_G u(x, t) \\ m &= \max_\Gamma u(x, t) \end{aligned}$$

Annahme: $M > m$ (also auf $G \setminus \Gamma$ realisiert).

$$M = u(x^*, t^*) \Rightarrow t_o < t^*, \varphi_1(t^*) < x^* < \varphi_2(t^*)$$

Wir definieren

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4l^2}(x - x^*)^2$$

mit

$$l := \max_{t_o \leq t \leq T} \{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\}.$$

Auf Γ gilt:

$$v \leq m + \frac{M - m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} < M.$$

Dagegen gilt

$$v(x^*, t^*) = M,$$

also nimmt auch v sein Maximum nicht auf Γ an. Das Maximum von v werde in (x_1, t_1) angenommen. Wieder gilt

$$t_o < t_1, \varphi_1(t_1) < x_1 < \varphi_2(t_1).$$

Aus der Theorie der Extremwerte wissen wir

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0.$$

In der letzten Zeile steht nur ein "≥", da $t_1 = T$ möglich ist. Somit gilt in (x_1, t_1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0.$$

Wir können aber auch anders rechnen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M - m}{2l^2} = \frac{M - m}{2l^2} < 0,$$

womit sich offenbar ein Widerspruch ergibt. \square

Folgerung 1 Die Lösung des ersten Randwertproblems ist eindeutig. Sind u_1 und u_2 Lösungen von (7.1)-(7.2), dann löst $u_1 - u_2$ das Problem mit homogenen Daten. Nach dem Maximumprinzip besitzt die homogene Aufgabe aber nur die Lösung $u \equiv 0$.

Folgerung 2 Die Lösung des ersten Randwertproblems hängt stetig von den Daten ab. Seien u_1 und u_2 Lösungen von (7.1)-(7.2) zu den rechten Seiten f_1 und f_2 . Dann gilt nach dem Maximumprinzip

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\bar{G})} \leq \|f_1 - f_2\|_{C(\Gamma)}.$$

Bemerkung: Für ein Rechteck G haben wir früher eine Lösung mit der Fourierrmethode hergeleitet. Nach Folgerung 1 ist dies die einzige.

7.2 Das Cauchyproblem

Im Unterschied zu früheren Definitionen des Cauchyproblems nennt man auch das folgende Cauchyproblem für die Wärmeleitgleichung. Gegeben sei eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{R})$, die zusätzlich beschränkt sein soll. Gesucht wird die Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{in } (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{in } (-\infty, \infty), \end{aligned} \tag{7.3}$$

wobei u stetig und beschränkt sein soll für $t \geq 0$.

Satz 20 Die Lösung von (7.3) ist in der Klasse der beschränkten Funktionen eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\varphi \equiv 0$, u Lösung von (7.3), $|u(x, t)| \leq M$ für $0 \leq t \leq T$ ($T > 0$ beliebig, aber fest). Zu zeigen: $u \equiv 0$. Sei dazu (x_0, t_0) fest mit $t_0 > 0$, $\nuarepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir zeigen $|u(x_0, t_0)| \leq \varepsilon$. Dazu betrachten wir

$$w(x, t) = 2t + x^2 \Rightarrow w_t = w_{xx}.$$

Damit lösen natürlich auch die Funktionen

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} + u, \quad \frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} - u$$

die Wärmeleitgleichung. Wir betrachten nun das Rechteck

$$0 \leq t \leq T, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{Mw(x_0, t_0)}{\varepsilon}} + |x_0|.$$

In diesem Rechteck sind beide Lösungen nichtnegativ. Das sieht man so: Für $t = 0$ gilt $u \equiv 0$. Für $|x| = \sqrt{\frac{Mw(x_0, t_0)}{\varepsilon}} + |x_0|$ gilt

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} \geq \frac{\varepsilon x^2}{w(x_0, t_0)} \geq \frac{\varepsilon}{w(x_0, t_0)} \cdot \frac{Mw(x_0, t_0)}{\varepsilon} = M.$$

Nach dem Maximumprinzip sind daher die beiden Lösungen nichtnegativ im gesamten Rechteck. Es gilt also:

$$\frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} + u \geq 0, \quad \frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} - u \geq 0,$$

also

$$|u| \leq \frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)}.$$

Damit gilt speziell im Punkt (x_0, t_0)

$$|u(x_0, t_0)| \leq \varepsilon.$$

Wir lassen nun ε gegen 0 gehen und erhalten $u(x_0, t_0) = 0$. Da der Punkt (x_0, t_0) beliebig gewählt war, gilt $u \equiv 0$. \square

Bemerkung: Die Eindeutigkeit lässt sich auch unter einer schwächeren Voraussetzung zeigen: Sei u Lösung von (7.3), $\varphi \equiv 0$, $f(x) = \max_{0 \leq t \leq T} |u(x, t)|$ und $T > 0$ fest. Existiert ein $c > 0$, so dass

$$f(x) \cdot e^{-cx^2} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \text{inf ty},$$

dann gilt $u \equiv 0$, d.h. die Eindeutigkeit. Der Beweis steht in Petrowski S.268. Ohne Wachstumsbeschränkung ist die Lösung nicht eindeutig.

Satz 21 Sei u beschränkte Lösung von (7.3) und $|\varphi(x)| \leq \eta$. Dann gilt auch $|u(x, t)| \leq \eta$.

Beweisidee: Wie beim letzten Satz. Wählen nur anstelle von $\frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)}$ nun die Funktion $\frac{\varepsilon w}{w(x_0, t_0)} + \eta$ und lassen dann wieder ε gegen Null streben. \square

Die Lösung von (7.3) lässt sich auch explizit angeben:

Satz 22 Die eindeutig bestimmte Lösung u von (7.3) ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \quad (t > 0). \quad (7.4)$$

Diese Darstellung wird auch als Poissonsches Integral bezeichnet.

Beweis: Da φ beschränkt ist, konvergiert dieses Integral offensichtlich für $t > 0$ (man überlege sich das selbst). Differenzieren wir das Integral beliebig oft nach t oder x , so konvergiert das Integral ebenfalls (dito). Diese Konvergenz ist gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes (x, t) . Wir können daher die Differentiation unter das Integral ziehen.

Die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

erfüllt die Wärmeleitgleichung (siehe 1. Übung Aufgabe 2a). Man überlegt sich leicht, dass daher auch u der Wärmeleitgleichung genügt. Wesentlich interessanter sind die Fragen, ob die Lösung beschränkt ist und ob sie die Anfangsbedingung erfüllt. Wir definieren

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

und erhalten

$$|u(x, t)| \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = M$$

Dabei haben wir $y = \frac{(x-\xi)}{2\sqrt{t}}$ substituiert und die Formel für das Gaußsche Fehlerintegral benutzt. Interpretieren Sie die eben gefundene Lösung zu $\varphi \equiv M$ physikalisch !

Kommen wir nun zur Anfangsbedingung. Wir verzichten hier auf die übliche Epsilontik und schreiben nur die Grundidee auf. Die Substitution $\xi = x + 2\sqrt{t}y$ führt zu

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{t}y) e^{-y^2} dy.$$

Außerdem gilt

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-y^2} dy.$$

Ist N hinreichend groß, dann gilt

$$u(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N \varphi(x + 2\sqrt{t}y) e^{-y^2} dy.$$

und natürlich auch

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N \varphi(x) e^{-y^2} dy.$$

jeweils bis auf ein ε . Es gilt also

$$|u(x, t) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N (\varphi(x + 2\sqrt{t}y) - \varphi(x)) e^{-y^2} dy + 2\varepsilon.$$

Der Ausdruck $\varphi(x + 2\sqrt{t}y) - \varphi(x)$ strebt aber für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen 0 auf $[-N, N]$. Für hinreichend kleines t gilt daher

$$|u(x, t) - \varphi(x)| < 3\varepsilon.$$

Wird N beliebig groß, wird ε beliebig klein, somit gilt $u(x, 0) = \varphi(x)$. \square

Bemerkung: Sei

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $t > 0$. Dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt $u > 0$ für beliebig kleine Zeit und beliebig entferntes x . Somit widerspricht die Wärmeleitgleichung in diesem Punkt der Realität.

7.3 Das Cauchyproblem für höhere Ortsdimension

Sei $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Als Cauchyproblem bezeichnen wir dann analog: Gesucht ist eine Lösung u mit

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (7.5)$$

sowie $u_t, \Delta u$ stetig für $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$, u stetig für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 23 *Ist $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, so gibt es genau eine beschränkte Lösung u von (7.5). Diese ist gegeben durch*

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Der Beweis der Eindeutigkeit erfolgt wieder analog zum eindimensionalen Fall. Man beweist zunächst das Maximumprinzip und folgert daraus die Eindeutigkeit. Die Gültigkeit der Lösungsdarstellung wird analog zum letzten Satz gezeigt.

Bemerkung: Die Funktion

$$\Gamma(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$$

heißt Grundleistung der n -dimensionalen Wärmeleitgleichung oder auch *Fundamentallösung* oder *Singularitätenlösung*.

7.4 Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$

Wir betrachten hier als Muster für parabolische Aufgaben das dritte Randwertproblem:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + c_0 u &= f & \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g & \text{auf } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Dabei sind folgende Funktionen gegeben:

- $c_0 \in L^\infty(Q)$, $c_0 = c_0(x, t)$
- $f \in L^2(Q)$, $f = f(x, t)$
- $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $\alpha = \alpha(x, t)$, $\alpha \geq 0$
- $g \in L^2(\Sigma)$, $g = g(x, t)$

Die Behandlung von (7.6) ist schwieriger als im elliptischen Fall, erfordert mehrere Techniken und dem entsprechend mehrere Typen von Räumen. Wir beginnen mit den gebräuchlichsten.

Definition: Wir definieren den Sobolevraum

$$W_2^{1,0}(Q) = \{u \in L^2(Q) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q) \forall i = 1, \dots, n\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W_2^{1,0}} = \left(\int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) \right)^{1/2}.$$

Die Ableitungen sind als schwache Ableitungen zu verstehen.

Grundlegende Eigenschaften und vieles mehr findet man in dem Buch von Ladyzhenskaya/Solonnikov/Uraltseva. Hier nur soviel: Dieser Raum ist versehen mit dem natürlichen Skalarprodukt ein Hilbertraum.

Definition: Wir bezeichnen mit $W_2^{1,1}$ den Sobolevraum

$$W_2^{1,1}(Q) = \{u \in L^2(Q) \mid \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(Q) \forall i = 1, \dots, n\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W_2^{1,1}} = \left(\int_0^T \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2 + u_t^2) \right)^{1/2}.$$

Auch dieser Raum wird mit dem entsprechenden Skalarprodukt zum Hilbertraum. Wir können nun (7.6) analog zum elliptischen Fall in eine Variationsformulierung überführen. Dazu multiplizieren wir die Wärmeleitgleichung mit einer Funktion $v \in W_2^{1,1}(Q)$ und integrieren über Q . Wir tun das zunächst

formal, denn noch wissen wir nicht, in welchem Sinne (7.6) durch u gelöst wird. Wir nehmen zunächst eine klassische Lösung an.

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_t v \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u v \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} c_0 u v \, dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v \, dx dt$$

Da $v \in W_2^{1,1}(Q)$ gilt, können wir bezüglich t und x partiell integrieren

$$\int_{\Omega} (u(x, T)v(x, T) - u(x, 0)v(x, 0)) - \int_Q u v_t + \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_Q \nabla u \nabla v + \int_Q c_0 u v = \int_Q f v$$

In dieser Formulierung treten die Werte $u(x, 0)$ und $u(x, t)$ auf. Weil y bezüglich t nur aus L^2 ist, sind diese Werte eigentlich gar nicht definiert. Wegen $u(x, 0) = u_0(x)$ können wir u_0 einsetzen. Dieser Trick hilft uns aber bei $u(x, T)$ nicht weiter. Bei v sieht das etwas anders aus. Die Existenz der ersten schwachen Ableitung bezüglich der Zeit sichert nach den Spursätzen, dass die Werte $v(x, 0)$ und $v(x, T)$ wohldefiniert in $L^2(Q)$ sind. Daher ist es sinnvoll, $v(x, T) = 0$ zu fordern. Damit schalten wir auch den Wert $u(x, T)$ aus. Wir ersetzen noch die Normalenableitung durch $g - \alpha u$ und erhalten

$$- \int_Q u v_t + \int_Q \nabla u \nabla v + \int_Q c_0 u v + \int_{\Sigma} \alpha u v = \int_Q f v + \int_{\Sigma} g v + \int_{\Omega} u_0 v(\cdot, 0) \quad (7.7)$$

Definition: $u \in W_2^{1,0}(Q)$ heißt schwache Lösung von (7.6), wenn die Beziehung (7.7) für alle Funktionen $v \in W_2^{1,1}(Q)$ erfüllt ist, die zusätzlich der Bedingung $v(x, T) = 0$ genügen.

Die folgende Aussage wird im Buch von Ladyzhenskaya/Solonnikov/Uraltseva bewiesen:

Satz 24 *Unter den angegebenen Voraussetzungen besitzt (7.6) genau eine schwache Lösung in $W_2^{1,0}(Q)$. Es existiert eine Konstante $c_1 > 0$, so dass*

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c_1 (\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)})$$

gilt, für alle $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$, $g \in L^2(\Sigma)$. Dabei hängt die Konstante c_1 natürlich nicht von u_0 , f und g ab.

Folgerung: Die Abbildung $(u_0, f, g) \mapsto u$ ist linear und stetig von $L^2(\Omega) \times L^2(Q) \times L^2(\Sigma)$ in $W_2^{1,0}(Q)$.

Auf den ersten Blick sieht das Ganze gut aus. Es gibt aber Schwachstellen. Für viele Anwendungen (z.B. bei der Optimalsteuerung) benötigt man Funktionen v mit $v(x, T) \neq 0$. Außerdem möchte man als v gern weniger reguläre Funktionen verwenden. Deshalb betrachtet man ein neues Konzept.

7.5 Schwache Lösungen in $W(0, T)$

7.5.1 Abstrakte Funktionen

... sind gar nicht so abstrakt.

Definition: Eine Abbildung $u = u(t)$ von $[a, b]$ in einen Banachraum X heißt *abstrakte Funktion*.

Beispiele:

1. $X = \mathbb{R}$ $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktion einer Veränderlicher

2. $X = \mathbb{R}^n$ $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorwertige Funktion

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

3. $X = H^1(\Omega)$ $u : [a, b] \rightarrow H^1(\Omega)$

In diesem Fall ist $u(t)$ für jedes t ein Element von $H^1(\Omega)$, also selbst wieder eine Funktion von $x \in \Omega$. Folglich

$$u(t) = u(., t) \quad \text{mit } u(., t) = u(x, t)$$

Man beachte, dass $u = u(x, t)$ aus $W_2^{1,0}(Q)$ in gewissem Sinn diese Gestalt besitzt.

Definition: $C([a, b], X) =$ Raum der stetigen Funktionen $u : [a, b] \rightarrow X$ mit Norm

$$\|u\|_{C([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X.$$

Für $u \in C([a, b], X)$ kann man das Riemann-Integral

$$\int_a^b u(t) dt$$

als Grenzwert Riemannscher Integralsummen

$$\sum_{i=1}^k u(\xi_i) \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

definieren.

Definition: Sei $u : [a, b] \rightarrow X$ abstrakte Funktion. Gibt es endlich viele messbare Mengen $M_i \subset [a, b]$, disjunkt mit $\cup M_i = [a, b]$ und endlich viele Elemente $u_i \in X$, so dass $u(t) = u_i$ auf M_i , so heißt u *Treppenfunktion*.

Definition: Eine abstrakte Funktion $u : [a, b] \rightarrow X$ heißt *messbar*, wenn es eine Folge $\{u_k(t)\}$ von Treppenfunktionen $u_k : [a, b] \rightarrow X$ gibt mit

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t), \quad \text{f.ü. auf } [a, b].$$

Definition: $L^p([a, b], X)$ = Raum aller messbaren abstrakten Funktionen $u : [a, b] \rightarrow X$ für welche

$$\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$$

gilt. Dieser Raum wird mit der Norm

$$\|u\|_{L^p([a,b],X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

versehen. Das hier auftretende *Bochner-Integral* ist ein Pendant zum Lebesgue-Integral. Es wird analog zum Lebesgue-Integral über Treppenfunktionen definiert:

$$\int_a^b u(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b u_k(t) dt$$

Der Wert des Integrals ist wieder ein Element von X . Für Treppenfunktionen definiert man das Integral

$$\int_a^b u(t) dt = \sum_{i=1}^m u_i \cdot \text{mes}(M_i).$$

Für $X = \mathbb{R}$ ist das Bochnerintegral identisch mit dem Lebesgue-Integral.

Beispiel: $X = H^1(\Omega)$, $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ mit Elementen $y = y(\cdot, t) = y(x, t)$
Die Norm ist definiert durch

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2([0,T],X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^T \int_{\Omega} u^2 + |\nabla u|^2 dx dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die Normen in $W_2^{1,0}(Q)$ und $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ übereinstimmen. Sind die Räume identisch ?

In der Tat sind sie zueinander isomorph, d.h.

$$W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0, T], H^1(\Omega))$$

(Jede Funktion aus dem einen Raum wird durch Abänderung auf einer Menge vom Maß Null zu einer Funktion des anderen Raumes. Die Beweiskonstruktion steht in Hill/Phillips.)

7.5.2 Abstrakte Funktionen und Wärmeleitung

Wir multiplizieren (7.6) mit $v \in H^1(\Omega) = V$ und halten $t \in (0, T)$ fest. Nach Integration über Ω ergibt sich

$$\int_{\Omega} u_t(t)v = - \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla v + \int_{\Omega} (f(t) - c_0(t)u(t))v + \int_{\Gamma} (g(t) - \alpha(t)u(t))v, \quad (7.8)$$

wobei wir überall die Abhängigkeit von x unterdrückt haben.

Wegen $L^2(Q) \cong L^2([0, T], L^2(\Omega))$ und analog $L^2(\Sigma) \cong L^2([0, T], L^2(\Gamma))$ können wir f , g und u als abstrakte Funktionen auffassen. Für festes $t \in (0, T)$ wird auf der rechten Seite jedem $v \in H^1(\Omega)$ linear und stetig eine reelle Zahl zugeordnet. Daher gilt

$$\int_{\Omega} u_t(t)v \, dx = \langle F(t), v \rangle \quad (7.9)$$

mit einem gewissen $F = F(t) \in H^1(\Omega)^* = V^*$, welches durch die rechte Seite von (7.8) definiert ist. Ist u schwache Lösung aus $W_2^{1,0}$, dann können wir u auch als abstrakte Funktion $u \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$ auffassen. Man kann nachrechnen, dass deshalb

$$\int_0^T \|F(t)\|_{H^1(\Omega)^*}^2 \, dt < \infty$$

gilt, d.h. $F \in L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)$. Durch Vergleich mit der linken Seite von (7.9) sollte daher gelten

$$u_t \in L^2([0, T], H^1(\Omega)^*).$$

Nur wissen wir nicht, was u_t sein soll ...

7.5.3 Vektorwertige Distributionen

Wir gehen aus vom Raum $U = L^2([0, T], V)$ und haben als Hintergrund den Raum $V = H^1(\omega)$ im Auge. Ist $u \in U$ gegeben, so definieren wir die *vektorwertige Distribution* $T : C_0^\infty(0, T) \rightarrow V$ durch

$$T\varphi := \int_0^T u(t)\varphi(t) dt$$

Die Ableitung $T'\varphi$ wird wie im reellwertigen Fall durch

$$T'\varphi := - \int_0^T u(t)\varphi'(t) dt$$

erklärt, T'' durch

$$T''\varphi := \int_0^T u(t)\varphi''(t) dt$$

usw. Es existiere nun eine abstrakte Funktion $w = w(t)$, $w : (0, T) \rightarrow V$, so dass

$$- \int_0^T u(t)\varphi'(t) dt = \int_0^T w(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T).$$

Dann nennen wir T' eine reguläre Distribution und können T' mit w identifizieren, d.h.

$$u'(t) = w(t).$$

Auf diese Weise könnte man betrachten

$$\{u \in L^2([0, T], V) \mid u' \in L^2([0, T], V)\}.$$

Diese Konstruktion wäre aber zu eng und würde uns nicht weiter bringen. Am Ende des letzten Abschnittes sahen wir, dass $u_t \in L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)$ sinnvoll ist.

Definition: Wir definieren den Hilbertraum

$$W(0, T) := \{u \in L^2([0, T], V) \mid u' \in L^2([0, T], V^*)\}$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|u\|_{W(0, T)} = \left(\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V^*}^2) dt \right)^{1/2}$$

und dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{W(0,T)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_{V^*} dt.$$

Zum Verständnis des Weiteren benötigen wir die Konstruktion des sogenannten *Gelfandschen Dreiers*. In unserem Anwendungsfall sieht die Situation wie folgt aus $V = H^1(\Omega)$ ist bekanntlich stetig und dicht eingebettet in $H = L^2(\Omega)$. Den Raum H^* identifizieren wir nach dem Satz von Riesz wieder mit H , aber den Raum V^* nicht mit V . Jedes Element $f \in H$ kann durch

$$v \mapsto (f, h)_H \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

als lineares und stetiges Funktional auf V aufgefasst werden. In diesem Sinne gilt also auch $f \in V^*$ und damit

$$V \subset H = H^* \subset V^*.$$

Man zeigt nun, dass die Einbettung $H \subset V^*$ ebenfalls dicht und stetig ist. Dies wird schön in Wloka (S.253 ff) gezeigt. Die Kette stetiger und dichter Einbettungen

$$V \subset H \subset V^*.$$

heißt *Gelfandscher Dreier*. Als Nebenprodukt der Theorie ergibt sich, dass Funktionale $\varphi \in V^*$ genau dann stetig auf H fortgesetzt werden können (beachte: $\varphi \in V^*$ sind eigentlich nur auf dem kleineren Raum V definiert), wenn φ die Form

$$\varphi(v) = (f, v)_H$$

mit einem festen $f \in H$ besitzt. Im Anwendungsfall $V = H^1(\Omega)$ bedeutet das

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^*$$

und $\varphi \in H^1(\Omega)^*$ ist genau dann stetig fortsetzbar auf $L^2(\Omega)$ wenn gilt

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

mit einem gewissen $v \in L^2(\Omega)$.

Der eigentliche Sinn der Einführung des Raumes $W(0, T)$ besteht in der Gültigkeit der folgenden Aussagen (bei beliebigen Gelfandschen Dreier):

Satz 25 Jedes $u \in W(0, T)$ kann (nach Abänderung auf einer Menge vom Maß Null) als Funktion aus $C([0, T], H)$ angenommen werden. In diesem Sinne gilt die Einbettung $W(0, T) \subset C([0, T], H)$, und diese Einbettung ist stetig. (siehe Lions)

In unserem Spezialfall ist $H = L^2(\Omega)$. Es gilt daher speziell $u(0) \in L^2(\Omega)$ und auch $u(T) \in L^2(\Omega)$ für Elemente u aus $W(0, T)$.

Satz 26 In $W(0, t)$ gilt die Formel der partiellen Integration

$$\int_0^T (u'(t), v(t))_{V, V^*} dt = (u(T), v(T))_H - (u(0), v(0))_H - \int_0^T (u(t), v'(t))_{V, V^*} dt$$

$(u, v \in W(0, T)).$

Folgerung: Es gilt die oft nützliche Beziehung

$$\int_0^T (u'(t), u(t))_{V, V^*} dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2$$

Bemerkung: Man lässt in der Regel die lästige Indizierung $(\cdot, \cdot)_{V, V^*}$ weg und schreibt einfach

$$(\varphi, v) \quad \varphi \in V^*, v \in V$$

Die Berechtigung liegt darin, dass bei $\varphi \in H$ automatisch das Skalarprodukt in H dasteht.

7.5.4 Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$

Wir wollen nun klären, ob schwache Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ (die nach Satz 24 existieren) mit Elementen aus $W(0, T)$ identifiziert werden können. Dazu betrachten wir wieder die Gleichung (7.6)

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + c_0 u &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g && \text{auf } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{aligned}$$

mit den im Abschnitt 7.4 getroffenen Voraussetzungen, $u \in W_2^{1,0}(Q)$ sei die schwache Lösung von (7.6). Damit gilt

$$\begin{aligned} - \int_Q uv_t \, dxdt &= - \int_Q \nabla u \nabla v \, dxdt - \int_Q c_0 uv \, dxdt - \int_\Sigma \alpha uv \, dSdt \\ &\quad + \int_\Omega u_0 v(0) \, dx + \int_Q f v \, dxdt + \int_\Sigma g v \, dSdt \end{aligned}$$

für alle $v \in W_2^{1,1}(\Omega)$ mit $v(T) = 0$. Insbesondere können wir alle Funktionen $v = v(x, t)$ der Form $v = \varphi(t)v(x)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ und $v \in V = H^1(\Omega)$ einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t)\varphi'(t), v)_H dt &= - \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)_H \varphi(t) dt - \int_0^T (c_0 u(t), v)_H \varphi(t) dt \\ &\quad - \int_0^T (\alpha(t)u(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) dt \\ &\quad + \int_0^T (f(t), v)_H \varphi(t) dt + \int_0^T (g(t), v)_{L^2(\Gamma)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

mit $H = L^2(\Omega)$ (Anfangsbedingung fällt weg). Unter den Integralen stehen für festes t jeweils lineare Funktionale, die dem Element $v \in V = H^1(\Omega)$ eine feste reelle Zahl zuordnen, der Reihe nach

$$\begin{aligned} F_1(t) &: v \mapsto (\nabla u(t), \nabla v)_H \\ F_2(t) &: v \mapsto (c_0 u(t), v)_H \\ F_3(t) &: v \mapsto (\alpha(t)u(t), v)_{L^2(\Gamma)} \\ F_4(t) &: v \mapsto (f(t), v)_H \\ F_5(t) &: v \mapsto (g(t), v)_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Alle Funktionale sind fast überall stetig, zum Beispiel

$$\|F_1(t)\| \leq \int_\Omega |\nabla u(t)| |\nabla v| \, dx \leq \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} \|F_3(t)\| &\leq \int_\Gamma |\alpha(t)| |u(t)| |v| \, dS \\ &\leq \|\alpha(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\alpha(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

deshalb gilt $F_i(t) \in V^* = H^1(\Omega)^*$ fast überall und

$$\begin{aligned} \|F_i(t)\|_{V^*} &\leq c \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \quad i = 1, 2, 3 \\ \|F_4(t)\|_{V^*} &\leq c \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ \|F_5(t)\|_{V^*} &\leq c \|g(t)\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Wegen $u \in W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0, T], H^1(\Omega))$, $f \in L^2(Q) \cong L^2([0, T], L^2(\Omega))$ und $g \in L^2(\Sigma) \cong L^2([0, T], L^2(\Gamma))$ und den letzten Abschätzungen gehören alle Funktionale F_i zum Raum $L^2([0, T], V^*)$. mit $F := F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$ folgt

$$-\int_0^T (u(t)\varphi'(t), v)_{L^2(\Omega)} dt \leq \int_0^T (F(t)\varphi(t), v)_{V, V^*} dt \quad \forall v \in V = H^1(\Omega)$$

mit $F \in L^2([0, T], V^*)$. Andererseits bedeutet die letzte Beziehung gerade $u'(t) = F(t)$ im distributionellem Sinne. Damit gehört u zum Raum $L^2([0, T], V^*)$ und wegen $u \in W_2^{1,0}(Q) \cong L^2([0, T], H^1(\Omega))$ kann u als Element des Raumes $W(0, T)$ aufgefasst werden.

Die Konsequenzen daraus sind enorm: Wegen Satz 25 ist u stetig mit Werten in H , damit sind die Werte $u(0)$ und $u(T)$ als Elemente von $H = L^2(\Omega)$ erklärt. Wir schätzen nun noch die Norm von u in $W(0, T)$ ab.

$$\|u\|_{W(0, T)}^2 = \|u\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega))}^2 + \|u'\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)}^2$$

Wir schätzen die Terme einzeln ab. Aus Satz 24 folgt

$$\|u\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega))} = \|u\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Außerdem gilt

$$\|u'\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)}^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^5 F_i \right\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)}^2 \leq \sum_{i=1}^5 \|F_i\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega)^*)}^2.$$

Wir wollen hier nicht alle F_i abschätzen, sondern nur das "komplizierte" F_1 :

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{L^2([0, T], V^*)}^2 &\leq \int_0^T \|F_1\|_{V^*}^2 dt \\ &\leq \int_0^T (c\|u(t)\|_V)^2 dt \\ &= c\|u\|_{L^2([0, T], V)}^2 \\ &= c\|u\|_{W_2^{1,0}(Q)}^2 \\ &\leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}). \end{aligned}$$

Die Terme F_2, \dots, F_5 können in ähnlicher Weise abgeschätzt werden. Insgesamt folgt daher

Satz 27 *Die schwache Lösung u der Gleichung (7.6) gehört dem Raum $W(0, T)$ an, und es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass gilt*

$$\|u\|_{W(0, T)} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|g\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Die Abbildung $(f, g, u_0) \rightarrow u$ ist damit stetig von $L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ in $W(0, T)$, insbesondere in $C([0, T], L^2(\Omega))$.

Kapitel 8

Die mehrdimensionale Wellengleichung

8.1 Kirchhoffsche und Poissonsche Formel

Wir betrachten hier das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u &= 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\u(x, 0) &= h(x) & x \in \mathbb{R}^n \\u_t(x, 0) &= g(x) & x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}\tag{8.1}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

Definition: *Sphärische Mittelwerte*

$$\int_{S(x,r)} f(y) dS(y) := \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} f(y) dS(y).$$

Zu den Funktionen $u(x, t)$, $h(x)$ und $g(x)$ definieren wir die Mittelwerte

$$\begin{aligned}U(x; r, t) &:= \int_{S(x,r)} u(y, t) dS(y) \\G(x; r) &:= \int_{S(x,r)} g(y) dS(y) \\H(x; r) &:= \int_{S(x,r)} h(y) dS(y)\end{aligned}$$

Für festes x betrachten wir U als Funktion von r und t und leiten eine partielle Differentialgleichung her, der U genügt.

Satz 28 Die Funktion $u = u(x, t)$ erfülle das Cauchy-Problem (8.1), und $x \in \mathbb{R}^n$ sei fest gewählt. Außerdem gelte $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Dann gilt auch $U \in C^m([0, \infty) \times [0, \infty))$ und U erfüllt die Euler-Poisson-Darbouxsche Gleichung

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+, t > 0 \\ U(x; r, 0) &= H(x; r) && r > 0 \\ U_t(x; r, 0) &= G(x; r) && r > 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Definition: Analog zum sphärischen Mittelwert definieren wir

$$\oint_{B(x,r)} f(y) dS(y) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dS(y).$$

Beweis: Für $r > 0$ ergibt sich

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy, \quad (8.3)$$

und zwar völlig identisch zum Beweis von Satz 7: Wir erhielten dort (in unseren neuen Bezeichnungen)

$$\varphi'(r) = U_r = \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy,$$

wegen $|S(x,r)| = \frac{n}{r}|B(x,r)|$. Für $r \downarrow 0$ folgt daraus $\lim_{r \downarrow 0} = 0$, daraus die Stetigkeit auf $[0, \infty)$. Wir differenzieren weiter und erhalten

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{n|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u dy \right) \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{-n+1}}{n|B(0,1)|} \int_0^r \int_{S(x,\varrho)} \Delta u dS d\varrho \right) \\ &= \frac{-n+1}{n} \frac{r^{-n}}{|B(0,1)|} \int_{B(x,r)} \Delta u dy + \frac{r}{n} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{S(x,r)} \Delta u dS \\ &= \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u dy + \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} \Delta u dS \\ &= \oint_{S(x,r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \oint_{B(x,r)} \Delta u dy \end{aligned} \quad (8.4)$$

Damit folgt $\lim_{r \downarrow 0} U_{rr} = \Delta U(x, t) + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\Delta U(x, t) = \frac{1}{n}\Delta U(x, t)$. In gleicher Weise kann weiter differenziert werden, um $U \in C^m$ zu erhalten.

Herleitung der Differentialgleichung: Aus (8.3) und der Wellengleichung folgt

$$U_r = \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt} \, dy$$

und wegen $|B(x, r)| = r^n |B(0, 1)| = \frac{r^n}{n} |S(0, 1)|$ gilt

$$U_r = \frac{1}{|S(0, 1)| r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} \, dy.$$

Damit erhalten wir

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{B(x,r)} u_{tt} \, dy = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_0^r \int_{S(x,\varrho)} u_{tt} \, dS d\varrho.$$

Wir leiten beide Seiten nach r ab

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^{n-1} U_r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(x,r)} u_{tt} \, dS = r^{n-1} \int_{S(x,r)} u_{tt} \, dS = r^{n-1} U_{tt}.$$

Ausdifferenzieren und Umstellen ergibt die gesuchte Gleichung. Die Anfangsbedingungen und die Stetigkeit ergeben sich ganz einfach aus der Definition und der Stetigkeit, zum Beispiel

$$U_t(x; r, 0) = \lim_{t \downarrow 0} \int_{S(x,r)} u_t(y, t) \, dS = \int_{S(x,r)} h(y) \, dS = H(x, r).$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Wir gehen nun wie folgt vor: Wir leiten zunächst eine Lösungsformel für $n = 3$ her (Kirchhoffsche Formel) und dann daraus eine für $n = 2$ (Poissonsche Formel).

Lösung von (8.1) für $n = 3$: (x wieder fest)

Voraussetzung: $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$.

Definition: $\tilde{U} := rU$, $\tilde{G} = rG$, $\tilde{H} = rH$.

Berechnen wir \tilde{U}_{tt} , so folgt aus Satz 28 mit $n = 3$

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = \tilde{U}_{rr}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{tt} &= \tilde{U}_{rr} \\ \tilde{U}(r, 0) &= \tilde{H} \\ \tilde{U}_t(r, 0) &= \tilde{G} \\ \tilde{U}(0, t) &= 0\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Fakt, dass U für $r \downarrow 0$ beschränkt bleibt, daher $\tilde{U} = rU \rightarrow 0$ für $r \downarrow 0$. Also löst \tilde{U} die eindimensionale Wellengleichung auf der Halbgeraden. Dafür haben wir die d'Alembertsche Formel. Aus der folgt

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy. \quad (8.5)$$

Wegen

$$u(x, t) = \lim_{r \downarrow 0} U(x; r, t) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r}$$

ergibt sich aus (8.5)

$$u(x, t) = \lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{1}{2r}(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t).$$

Nach Definition gilt $\tilde{G} = tG(t)$, analog \tilde{H} , also

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} G(t) + tH(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{S(x,t)} g(y) dS \right) + t \int_{S(x,t)} h(y) dS \\ &= \int_{S(x,t)} g(y) dS + t \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{S(0,1)} g(x+tz) dS(z) \right) + \int_{S(x,t)} th(y) dS\end{aligned} \quad (8.6)$$

Demzufolge gilt die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

$$u(x, t) = \int_{S(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)) dS(y) \quad (8.7)$$

Bemerkung: Die Lösung u im Punkt x hängt damit nur von den Daten auf der Kugeloberfläche vom Radius t um x ab. Dies ist wichtig und entspricht auch der alltäglichen Erfahrung: Ein lautes Geräusch, das von einem Punkt \tilde{x} ausgeht, nimmt man im Punkt x genau zu einem Zeitpunkt wahr. Damit ist es möglich, sich über das Gehör zu orientieren.

Der Fall $n = 2$

Die eben angewendete Methode funktioniert im Fall $n = 2$ nicht. Statt dessen geht man wie folgt vor: Man fasst die Funktion $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ als eine spezielle Funktion von drei Variablen (x_1, x_2, x_3) auf,

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t).$$

Aus dem Cauchyproblem (8.1) folgt dann

$$\begin{aligned}\bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \bar{u}(x, 0) &= \bar{g} \\ \bar{u}_t(x, 0) &= \bar{h}\end{aligned}$$

mit $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$, $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$. Wir schreiben jetzt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und wenden das Kirchhoffsche Formel in der Form (8.6) an:

$$u(x, t) = \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{S(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) d\bar{S} \right) + t \int_{S(\bar{x}, t)} \bar{h}(y) d\bar{S}$$

Wir benutzen nun

$$\int_{S(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) d\bar{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) d\bar{S} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x, t)} g(y) \sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2} dy$$

mit $f(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$ (explizite Darstellung der oberen Kugeloberfläche; die 2 kommt durch die untere ins Spiel). Aus

$$\sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$$

folgt nun

$$\begin{aligned}\int_{S(\bar{x}, t)} \bar{g}(y) d\bar{S} &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \\ &= \frac{t}{2} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy\end{aligned}$$

Analog behandelt man das h -Integral. Insgesamt erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \right) + \frac{t^2}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy.$$

Nun wird noch auf dem üblichen Weg die Differentiation ausgeführt: Transformation auf $B(0, 1)$, Differentiation, Rücktransformation. Am Ende ergibt sich die *Poissonsche Formel* ($n = 2$)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \quad (8.8)$$

Bemerkung:

Hier hängt u im Punkt x von den Daten im Kreis um x ab, nicht nur von denen auf dem Rand. Dies kann man auch in höheren Ortsdimensionen beobachten: Ist $n \geq 3$ ungerade, so hängt $u(x, t)$ nur von den Daten auf der Oberfläche $S(x, t)$ ab, während bei geradem n die Dinge so wie im Fall $n = 2$ liegen. Richtig hören kann man also nur in ungeraden Dimensionen.

Formeln, Details für $n > 3$: Evans S.75-81.

8.2 Die inhomogene Wellengleichung

Hier behandeln wir das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= 0 \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Zur Lösung von (8.9) wird ein Superpositionsprinzip angewendet. Dazu betrachtet man die homogene Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (s, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} u(x, t; s) &= 0 && \text{bei } t = s \\ u_t(x, 0) &= f(x, t; s) && \text{bei } t = s. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (8.11)$$

das Problem (8.9) löst. Im nächsten Satz bezeichnet $[x]$ die bekannte entier-Funktion (ganzer Teil).

Satz 29 *Es sei $n \geq 2$ und $f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ gegeben und u durch die Formeln (8.10)–(8.11) definiert. Dann gilt*

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$
- (iii) Für alle $x^o \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x^o, t \downarrow 0} u(x, t) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x^o, t \downarrow 0} u_t(x, t) = 0$$

Beweis: (i) Die Regularitätsaussage wollen wir hier nicht nachweisen, sie kann bei Evans nachgelesen werden.

(ii) Zur Wellengleichung:

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds$$

Differentiation nach t ergibt wegen (8.10)

$$u_t(x, t) = u(x, t; t) + \int_0^t u_t(x, t; s) ds = \int_0^t u_t(x, t; s) ds.$$

Differenzieren wir das Ergebnis noch einmal, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_t(x, t; t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

Andererseits folgt nach Anwendung des Laplace-Operators (Integration und Differentiation dürfen wegen (i) vertauscht werden)

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta ds = \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds,$$

weil $u(x, t; s)$ die homogene Wellengleichung löst. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt sofort

$$u_{tt} - f = \Delta u$$

also die inhomogene Wellengleichung.

(iii) Aus den obigen Darstellungen von u und u_t ergeben sich die Grenzwerte für $x \rightarrow x^o$ und $t \downarrow 0$ sofort, da

$$\int_0^t \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0$$

gilt. □

8.3 Eindeutigkeitsfragen

Unter natürlichen Voraussetzungen ist die Lösung der Wellengleichung eindeutig bestimmt. Zwei verschiedene Aussagen dazu werden hier mit Hilfe von Energiemethoden bewiesen.

Satz 30 (Eindeutigkeit) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ , $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = \bar{Q} \setminus Q$.*

Es existiert höchstens eine Funktion $u \in C^2(\bar{Q})$, welche die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } Q \\ u &= g && \text{auf } \Sigma \\ u &= h && \text{in } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{8.12}$$

löst.

Bemerkung: Σ enthält alle Punkte mit $x \in \Gamma$ und alle mit $t = 0$. Die zweite Gleichung in (8.12) fasst daher Anfangs- und Randbedingung zusammen.

Beweis: Es sei u_1 und u_2 Lösungen von (8.12). Dann löst $u = u_1 - u_2$ das entsprechende homogene Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } Q \\ u &= 0 && \text{auf } \Sigma \\ u &= 0 && \text{in } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Wir müssen nur $u \equiv 0$ zeigen. Dazu definieren wir ein *Energiefunktional*

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann folgt

$$\dot{e}(t) = \int_{\Omega} u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t \, dx.$$

Zunächst gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t \, dx = \int_{\Gamma} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_{\Omega} u_t \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} u_t \Delta u \, dx.$$

Aus $u = 0$ auf Γ für alle t folgt nämlich $u_t = 0$ auf Γ . Damit ergibt sich

$$\dot{e}(t) = \int_{\Omega} u_t (u_{tt} - \Delta u) \, dx = 0 \quad \forall t \in (0, T].$$

Somit gilt $e(t) \equiv e(0) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Also erhalten wir

$$u_t \equiv 0, \quad \nabla u \equiv 0 \quad \text{in } Q.$$

Daher ist u konstant und wegen $u(x, 0) = 0$ gilt $u \equiv 0$, was natürlich $u_1 = u_2$ impliziert. \square

Zum Abschluss betrachten wir noch, welche Raum-Zeit-Punkte durch gewisse Anfangsereignisse überhaupt beeinflusst werden können. Wir werden dabei im Gegensatz zur Wärmeleitgleichung eine *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen* feststellen.

Definition: (Einflusskegel)

$$K(x_0, t_0) = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

Satz 31 (*Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit*) Gilt $u = u_t = 0$ auf der Grundfläche $B(x_0, t_0) = K(x_0, t_0) \cap \{(x, t) \mid t = t_0 - t_0 = 0\}$ des Kegels $K(x_0, t_0)$, so gilt auch $u \equiv 0$ in $K(x_0, t_0)$. u ist dabei die Lösung der homogenen Wellengleichung.

Beweis: Als Energie definieren wir jetzt

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0 - t)} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \, dx,$$

$0 \leq t \leq t_0$. Durch Differentiation nach t und unserem üblichen Trick ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t \, dx - \frac{1}{2} \int_{S(x_0, t_0-t)} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \, dS \\
 &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) + \int_{S(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \, dS \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{S(x_0, t_0-t)} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \, dS \\
 &= \int_{S(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \, dS - \frac{1}{2} \int_{S(x_0, t_0-t)} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \, dS
 \end{aligned}$$

Aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |\nabla u \cdot \nu| |u_t| \leq |\nabla u| |u_t| \leq \frac{1}{2} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2).$$

Daher gilt

$$\dot{e}(t) \leq 0 \quad \text{also } e(t) \leq e(0) = 0$$

wegen $u_t = \nabla u = 0$ auf $B(x_0, t_0)$. Da die Energie aber immer nichtnegativ ist, kann nur $e(t) \equiv 0$ gelten, woraus $u \equiv 0$ in K folgt. \square

Folgerung:

(i) Die Lösung der Wellengleichung hängt nicht von Störungen außerhalb des Einflusskegels K ab.

(ii) Damit haben Störungen endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.