

**Funktionen mehrerer Veränderlicher**

## Partielle Differentialgleichungen - 1. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Berechnen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach  $x$  und  $y$ :

a)  $u = \phi(\xi, \eta), \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y$

b)  $u = \phi(\xi, \eta), \quad \xi = x^2 + y^2, \quad \eta = xy$

c)  $z = f(u), \quad u = \phi(x, y)$

2. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie:

a)  $f(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}$  (a const.) ist eine Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

b)  $f(x, y) = \phi(y + ax) + \psi(y - ax)$  (a const.,  $\phi(\cdot), \psi(\cdot) \in C^2$ ) ist Lösung von

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

3. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie, daß  $\Delta u = 0$  folgende Lösungen besitzt:

a) für  $n = 2$ :  $u = \ln r,$

b) für  $n \geq 3$ :  $u = r^{2-n}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$

4. Zeigen Sie für harmonische Funktionen  $u$  ( $\Delta u = 0, u \in C^\infty$ ) ( $n=2$ ):

a)  $f(z) = \partial u / \partial x - i \partial u / \partial y$  ist holomorph (komplex differenzierbar).

b)  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  holomorph  $\Rightarrow u, v$  harmonisch.

c)  $v = \partial u / \partial x - \partial u / \partial y$  ist harmonisch.

5. Lösen Sie (mittels Analogien zu gew. DGLn.):

a)  $u_{yy} + u_y + x = 0;$

b)  $u_{xx} + y = 1/x;$

c)  $z_{xy} + yz_x - xz_y = 0$  (nur partikuläre Lösungen gesucht; verwenden Sie dabei den Ansatz  $z(x, y) = z_1(x)z_2(y)$ ).