TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2003
Institut für Mathematik
Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Elementare Lösungsmethoden

Partielle Differentialgleichungen - 5. Übung

Wiederholung: Lineare gewöhnl. Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Sturm–Liouvillesche Eigenwertprobleme, Fourierreihen

1. (Vorrechenaufgabe) Beweisen Sie Lemma 2 aus dem Abschnitt 3.1.3 (Spiegelungsmethode).

2. (Vorrechenaufgabe) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe der Spiegelungsmethode Eine Saite der Länge l bewege sich entsprechend der Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad (0 < x < l,\, t > 0),$$

wobei u die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage bedeutet. Dabei seien folgende Anfangs– und Randbedingungen gestellt:

a) Die Saite sei an beiden Enden eingespannt und habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Auslenkung $u(0, x) = \sin \frac{x\pi}{l}$ und die Anfangsgeschwindigkeit 0.

b) Das rechte Ende sei eingespannt, das linke soll frei schwingen. Anfangsauslenkung und –geschwindigkeit seien durch $u(0, x) = u_t(0, x) = \cos \frac{x\pi}{2l}$ gegeben.

3. (Vorrechenaufgabe) Geben Sie Eigenwerte und dazugehörige Eigenfunktionen zu den folgenden Sturm–Liouville–Problemen an:

a) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

b) $y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

4. (Vorrechenaufgabe) Lösen Sie folgendes Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Fouriermethode:
$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,\, t > 0,$
$u(0, x) = \sin x,$
$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$

5. Lösen Sie folgende Anfangs– und Randwertaufgabe zur Wellengleichung mit Hilfe der Fouriermethode (Achtung: Aufgabe wird auf dem nächsten Übungsblatt fortgesetzt.)
$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, \qquad x \in (0, \pi),\ t > 0$
$u(x, 0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x, 0) = 1$
$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$