

Elliptische DGL – Anwendungen

Partielle Differentialgleichungen - 6. Übung

1. Lösen Sie folgende Anfangs- und Randwertaufgaben zur Wellengleichung mit Hilfe der Fouriermethode! (Fortsetzung vom letzten Blatt)

a) $u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = x + t, \quad x \in (0, \pi), t > 0$

$$u(x, 0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x, 0) = 1$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$

b) $u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = x + t + 2, \quad x \in (0, \pi), t > 0$

$$u(x, 0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x, 0) = 2 + x - \pi$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = t^2 + t$$

2. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace-Gleichung im Innengebiet $D_i : x^2 + y^2 < 1$ und im Außengebiet $D_a : x^2 + y^2 > 1$, die die Randbedingung $u(r, \varphi) = 1 + 8 \sin 2\varphi - 3 \cos \varphi$ für $(x, y) \in \partial D$ erfüllt.

3. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der Laplace-Gleichung im Gebiet $D : x^2 + y^2 < 1$ bei der Randbedingung 2. Art $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ für $(x, y) \in \partial D$.

4. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der DGL $\Delta u = 0$ für $(x, y) \in D : x^2 + y^2 + 2x < 0$, welche die RB $u(x, y) = 4x^3 + 6x - 1$, $(x, y) \in \delta D$ erfüllt.

5. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon}$ für die Raumladungsdichte $\rho = \rho_0 r^n$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, (ϵ -Dielektrizitätskonstante).

6. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie das Potential u in der Umgebung von zwei kegelförmigen Elektroden, deren Spitzen gegeneinander isoliert sind.

Kugelkoordinaten: $u(r, \vartheta, \varphi) = u(\vartheta)$

RB: $u(\vartheta_1) = u_1 = \text{konst}$

RB: $u(\vartheta_2) = u_2 = \text{konst}$

