TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2003

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Distributionen

Partielle Differentialgleichungen - 8. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung folgender Randwertaufgaben (dabei seien $k > 0$, $h \geq 0$ Konstanten) :

a) $\Delta u = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = g$ auf $\Gamma \quad (h > 0)$

b) $-\Delta u + ku = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ auf Γ

c) $-\Delta u + ku = f$ in G, $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = g$ auf Γ.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit einer "Testfunktion" integrieren Sie über G und verwenden Sie (3). (Benötigte Glattheitsvoraussetzungen seien erfüllt.)

2. Zeigen Sie, daß die durch die Funktionen

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

erzeugten Distributionen für $\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen die Delta-Distribution konvergieren.

3. Zeigen Sie, daß die durch die Funktionen

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\left(1 - \dfrac{|x|}{\varepsilon}\right) & \text{für } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

erzeugten Distributionen für $\varepsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gegen die Delta-Distribution konvergieren.

4. Geben Sie eine Funktionenfolge $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ an, für die die entsprechenden Distributionen T_{ϕ_n} gegen δ konvergieren. (Hinweis: Schauen Sie sich Abschnitt 5.1.2 Beispiel 1 an.)

5. (Vorrechenaufgabe) Berechnen Sie die erste und zweite verallgemeinerte Ableitung von $f(x) = |x|$, betrachtet als Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.