nächste Woche

Do "frei", andere Tage 1 x UE
1 x VL

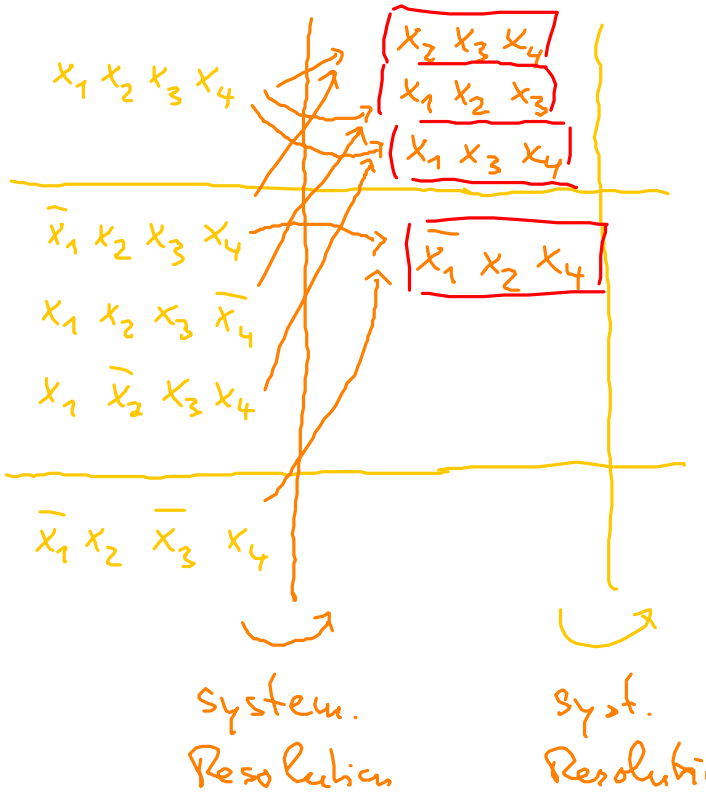
14 x 3 Std = 42
= 21 Doppelstd.
- Himmelfahrt = 20

Quine Mc Cluskey + Überdeckungsproblem

- nächst Wiederholung
- dann neues Beispiel
- ausstehender Beweis, dass man alle Primimplikanten mit Quine Mc Cluskey bekommt
- zur Bedeutung des Überdeckungsproblems

Beispiel: Bestimmung der Primimplikanten durch systematische Resolution

f habe folgenden Minterme in DNF (5 Minterme)



Sind die Primimplikanten von f

nichts geht mehr

Überdeckungsproblem im Bsp

	$x_1x_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
$x_1x_3x_4$	1				
$x_1x_2x_3$	1				
$x_2x_3x_4$	1				
$\bar{x}_1x_2x_4$		1			
		1			
			1		
				1	
					1

kostenminimale Überdeckung erzwungen

Die rote Auswahl "überdeckt" alle Spalten (= Minterme)

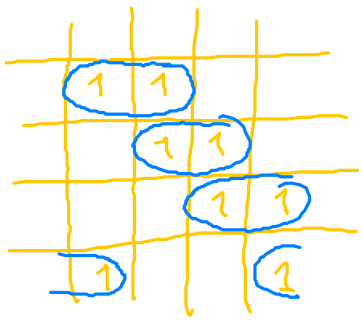
Minterm $x_2x_3x_4$ nicht benötigt

$\Rightarrow$ hier ist $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_4$

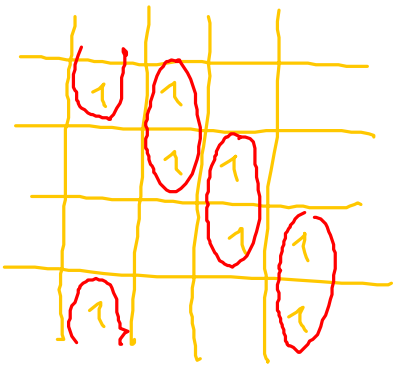
kostenmin. Darstellung von f

I.A. gibt es mehrere Auswahlen von Mengen von Primimplikanten, die f darstellen. Eine kostenminimale solche Auswahl zu finden ist ein schwieriges algorithmisches Problem (dazu später mehr)

Bsp. mit 2 möglichen Überdeckungen (im Karnaugh-diagramm



Darstellung mit Primimplikanten



andere Darstellung mit Primimplikanten

beide gleiche Kosten

Im Karnaugh-Diagramm gilt:

Primimplikanten = maximale Rechteckblöcke von Einsen mit 2-er Potenzen als Seitenlängen

Jetzt: Quine Mc Cluskey erzeugt <u>alle</u> Primimplikanten von f

SATZ: Terme $M_1, M_2, \dots, M_k$ entstehen durch Resolution aus DNF von f bis keine Verkürzung mehr möglich ist
(dabei $M_i \neq M_j$ für $i \neq j$, kein M_i Verkürzung von M_j)
$\Rightarrow$ $M_1, \dots, M_k$ sind genau die Primimplikanten von f

Beweis: (1) jeder Term M_i ist Primimplikant von f
(2) Es gibt keine weiteren Primimplikanten von f

zu (1): M_i entsteht durch Resolution $\Rightarrow$ M_i ist Implikant
Annahme M_i kein Primimplikant $\Rightarrow$ echte Verkürzung M_i' von M_i ist Implikant

etwa $M_i = x_1 \bar{x}_2 x_3$ $\quad M_i' = x_1 \bar{x}_2$
(allgemein: Wegfall von einem x_j oder $\bar{x}_j$)

Wähle x_j so dass $M_i = 0$ wird
Wähle andere Variable so, dass $M_i' = 1$, aber alle anderen Terme $M_j = 0$ werden (geht, da sie sich von M_i unterscheiden)
Sei $y = (y_1 \cdots y_n)$ die entstehende Belegung der x_i mit 0 bzw 1

$\Rightarrow$ $M_i'(y) = 1$
$M_\ell(y) = 0 \quad \ell = 1, \dots, k$
$f(y) = \sum_{\ell=1}^{k} M_\ell(y) = 0$

$\Big\backslash$ Widerspruch dazu dass M_i' ein Implikant von f ist

zu (2) Annahme $\exists$ weiteren Primimplikanten M von f.

Betrachte in DNF von f alle Minterme m_i, für die M eine Verkürzung ist. Sei I die Indexmenge dieser i

$$f(x_1 \dots x_4) = x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + \dots$$

$$M = \bar{x}_2 x_4$$

$\Rightarrow$ ersten 4 Minterme Verallgemeinerung von M

M ausklammern $\Rightarrow \bar{x}_2 x_4 \underbrace{(x_1 x_3 + x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3)}_{\equiv 1 \text{ (wegen Resolution)}}$

allgemein M ausklammern aus $\sum_{i \in I} m_i$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I} m_i = M \underbrace{\left(\sum_{i \in I} m_i' \right)}_{\text{kann } \sum_{i \in I} m_i' \not\equiv 1}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ Belegung y' der Variablen in $\sum_{i \in I} m_i'$, die den Wert 0 ergibt

restliche Variable so belegen (ergibt insgesamt Belegung y) dass $M(y) = 1$, alle $m_i(y) = 0$ wenn $i \notin I$ und i einstelliger Index von f

$\Rightarrow f(y) = 0$, aber $M(y) = 1$

Widerspruch dazu, dass M Implikant von f ist

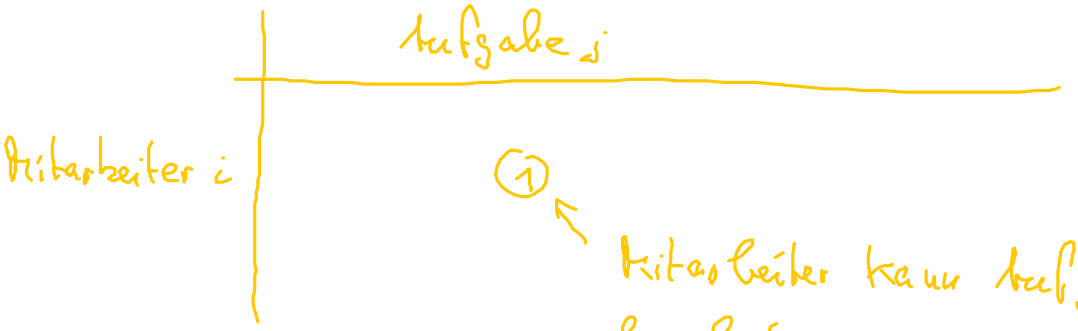
Also $\sum_{i \in I} w_i' \equiv 1$ $\Rightarrow$ M entsteht durch Resolution

$\Rightarrow$ M ist eines der $M_1, \dots, M_k$, Widerspruch $\square$

zum Überdeckungsproblem:

ist von übergeordneter Bedeutung, tritt an vielen Stellen in der angewandten Mathematik auf

Bsp: Zuordnung von Mitarbeitern zu Aufgaben



Mitarbeiter kann Aufgabe bearbeiten

[evtl. Gewicht $w_{ij} \hat{=}$ wie gut kann M_i A_j bearbeiten]

Basisaufgabe: Finde Auswahl von Mitarbeitern, so dass alle Aufgaben bearbeitet werden

$\hat{=}$ Auswahl von Zeilen, so dass die da zugehörigen Einsen alle Spalten überdecken

Überdeckungsproblem (= kostenmin. Auswahl von Zeilen, deren Einsen alle Spalten überdecken) ist fundamental schwerer als alle bisher in Coma behandelten Aufgaben

bisherige Aufgaben waren effizient lösbar

opt. Postfix code	$O(n \log n) \leq O(n^2)$
kürzeste Wege	$O(n^4)$
opt. aufspan. Teilbaum	$O(n^3)$
Sortieren	$O(n \log n) \leq O(n^2)$
⋮	

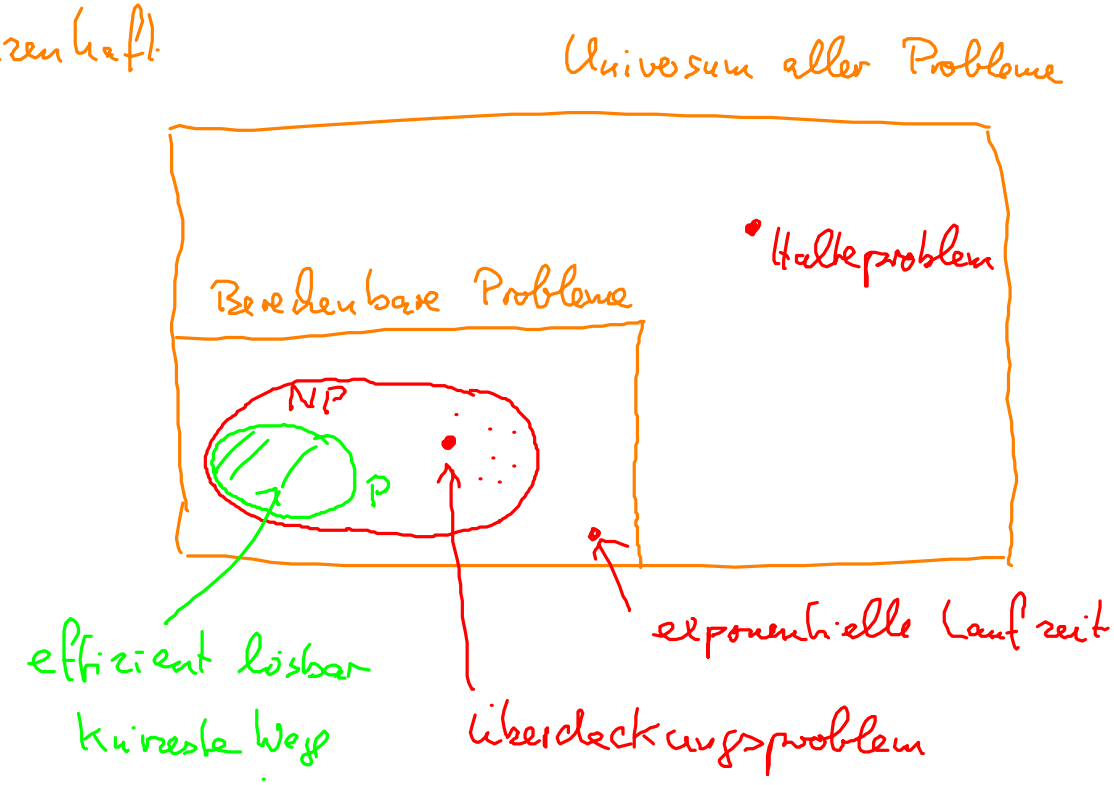
Laufzeit des Algo beschränkt durch Polynom in Größe des Input

Für Überdeckungsproblem bisher kein effizienter Algo bekannt (offen ob es einen gibt)

Es gibt Klassifizierung von Problemen. Danach gehört Überdeckungsproblem zu den "schwierigsten"

[Präzisierung in VL ADM I
kfg. diskrete Math
oder Informatik VL Effiziente kfg.]

Skizzenhaft:



offenes Problem ob $P = NP$ oder ob $P \neq NP$

Finden eines effizienten Alg. für Überdeckungsproblem würde $P = NP$ implizieren

→ Preis 1.000.000 $ für Lösung