

9. (und letztes) Übungsblatt ‘Diskrete Geometrie’

Satz von Helly, Hochdimensionales

Abgabe: *Mittwoch, 7. Juli 2004*

- (a) Seien $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex und $C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{R}^d$, $n \geq d + 1$ konvexe Mengen, so dass der Durchschnitt von je $d + 1$ eine verschobene Kopie von K enthält. Zeige, dass dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n C_i$ eine verschobene Kopie von K enthält.
(b) Finde ein Beispiel von 4 konvexen Mengen in der Ebene, so dass der Durchschnitt von je dreien eine Strecke der Länge 1 enthält, aber der Durchschnitt über alle nicht.

5 Punkte

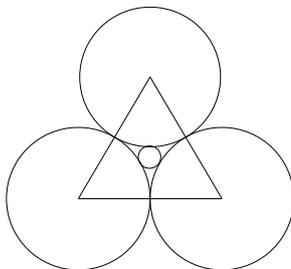
- (a) Berechne den Radius der Umkugel des regulären n -Simplex

$$\text{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- (b) Berechne den Radius der Inkugel des regulären n -Simplex

$$\text{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- (c) Berechne das Volumen eines regulären n -Simplex, der der Einheitssphäre eingeschrieben ist.
- (d) Betrachte wieder den regulären n -Simplex $\text{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Lege um jede Ecke eine Kugel so dass sich die Kugeln um benachbarte Ecken im Mittelpunkt der Verbindungskante berühren. Lege eine kleine Kugel so dass sie alle bisher konstruierten Kugeln berührt. Berechne den Radius der kleinen Kugel! Ab welcher Dimension passt diese Kugel nicht mehr in den Simplex?



10 Punkte

Σ 15 Punkte