T U ¨ B
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Stefan Felsner
Andreas Paffenholz

Diskrete MAFI
Sommersemester 2005
Wiebke Höhn
Raman Sanyal
Xiumei Wang

D M ¨ I
P ¨

Bearbeitung am 27./28. April 2005 in den Tutorien

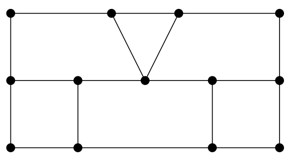
A 1.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\overline{E}$ die komplementäre Eckenmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) G ist ein Baum.
(2) Zwischen je zwei Knoten in G gibt es genau einen Weg.
(3) Wenn man eine beliebige Kante $e \in E$ aus G entfernt, wird der Graph unzusammenhängend.
(4) Hinzufügen einer beliebigen Kante $e \in \overline{E}$ zu G erzeugt genau einen Kreis.

A 2.

Man beweise oder widerlege, dass man ein Stück Faden (beliebiger Länge) so auf folgende Zeichnung des Graphen G legen kann, dass der Faden jede Kante genau einmal schneidet und keinen Knoten berührt.



Wie könnte man ggf. den Graphen ändern, damit das funktioniert?

A 3.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n := |V|$ Knoten. Mit $\overline{E}$ bezeichnen wir die Kanten des komplementären Graphen $\overline{G}$, also $\overline{E} := \binom{V}{2} \setminus E$.

(1) Existiert in G immer ein Eulerkreis oder -weg?
(2) Gibt es Kantenmengen $F \subset E$ und $\overline{F} \subset \overline{E}$, so dass $\tilde{G} := (V, (E \setminus F) \cup \overline{F})$ einen Eulerkreis oder -weg besitzt?
(3) Wieviele Kanten müssen F und/ oder $\overline{F}$ mindestens enthalten, damit $\tilde{G} := (V, (E \setminus F) \cup \overline{F})$ einen Eulerkreis oder -weg besitzt?

A 4.

In einem Graphen $G = (V, E)$ definiert man den *Abstand* $\mathrm{dist}(u, v)$ zweier Knoten $u, v \in V$ als die Länge eines kürzesten Weges zwischen u und v (dabei muss der Weg nicht eindeutig sein). Falls es keinen solchen Weg gibt, setzt man $\mathrm{dist}(u, v) = \infty$.

Dabei erweitert man Ordnung und Operationen sinnvoll auf die Menge $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, d.h. man setzt $n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $n + \infty = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(1) Zeigen Sie, dass die Entfernung eine *Metrik* auf dem Graphen G definiert; d.h. für beliebige Knoten $u, v, w \in V$ gilt:

(1)	$\mathrm{dist}(u, v) \geq 0$ und $\mathrm{dist}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$	(Positive Definitheit)
(2)	$\mathrm{dist}(u, v) = \mathrm{dist}(v, u)$	(Symmetrie)
(3)	$\mathrm{dist}(u, v) \leq \mathrm{dist}(u, w) + \mathrm{dist}(w, v)$	(Dreiecksungleichung)

(2) Für einen zusammenhängenden Graphen G definieren wir

(1)	die *Exzentrizität* eines Knotens v durch	$\mathrm{ex}(v) := \max\{\, \mathrm{dist}(u, v) \mid u \in V \,\}$
(1)	den Radius von G durch	$\mathrm{rad}(G) := \min\{\, \mathrm{ex}(v) \mid v \in V \,\}$
(2)	den Durchmesser von G durch	$\mathrm{diam}(G) := \max\{\, \mathrm{ex}(v) \mid v \in V \,\}$

Geben Sie jeweils einen zusammenhängenden Graphen mit mindestens 5 Knoten an, für den gilt:

(a) $\mathrm{rad}(G) = \mathrm{diam}(G)$

(b) $2\ \mathrm{rad}(G) = \mathrm{diam}(G)$.

(3) Zeigen Sie, dass die Beispiele in b) Extrembeispiele sind, also dass für jeden zusammenhängenden Graphen G gilt:

$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\ \mathrm{rad}(G).$$

(4) Geben Sie alle zusammenhängenden Graphen an, für die $\mathrm{diam}(G) = 1$ gilt.