T U ¨ B
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Stefan Felsner
Andreas Paffenholz

Diskrete MAFI
Sommersemester 2005
Wiebke Höhn
Raman Sanyal
Xiumei Wang

D M ¨ I
P ¨

Bearbeitung am 7./8.. Juni 2005 in den Tutorien

A 1.

Sei $\mathcal{H}$ die Menge

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ eine Untergruppe der 3×3-Matrizen bildet. Was ist die Eins in dieser Gruppe? Ist sie kommutativ?

A 2.

Sei R die Teilmenge der Polynome mit reellen Koeffizienten in x, in denen nur geraden Potenzen von x auftreten (beachten Sie, dass 0 eine gerade Zahl ist).

(1) Zeigen Sie, dass R mit der üblichen Polynomaddition und -multiplikation ein Ring ist.
(2) Ist auch die Menge R' der Polynome mit auschließlich ungeraden Potenzen von x ein Ring?

A 3.

Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen und Einselement e. Zeigen Sie: Wenn n gerade ist, so gibt es ein Element $a \in G$, $a \neq e$ mit $a = a^{-1}$. Kann es ein solches Element auch geben, wenn n ungerade ist?

A 4.

Die folgende Tabelle stellt einen Teil der Verknüpfungen einer Gruppe dar:

$\times$	a	b	c	d	e
a	c		d		a
b		d			
c			b		
d				a	
e				d	e

(1) Welches der Elemente muss die Eins in der Gruppe sein?
(2) Bestimmen Sie die fehlenden Verknüpfungen!
(3) Ist die Gruppe kommutativ?
(4) Bestimmmen Sie alle Potenzen von a!

A 5.

Sei G eine endliche Gruppe der Ordung n.

(1) Sei $a \in G$ verschieden von der Eins. Wie könnte man die kleinste Untergruppe G_a von G beschreiben, die a enthält?
(2) Zeigen Sie, dass die Ordung von G_a ein Teiler von n ist.