Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Stefan Felsner
Andreas Paffenholz

Diskrete MAFI
Sommersemester 2005

Wiebke Höhn
Raman Sanyal
Xiumei Wang

Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker
4. Übungsblatt

Abgabe am 6. Juni 2005 **vor** der Vorlesung

Zum Erreichen der vollen Punktzahl muss bei jeder Aufgabe der Lösungsweg vollständig angegeben werden.

Aufgabe 1. — 5 Punkte

(1) Sei p_n die n-te Primzahl, also $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{ggT}(1+\prod_{i=1}^{m} p_i, p_j) = 1$ für alle $1 \leq j \leq m$.
(2) Folgern Sie daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
(3) Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}, n > 2$ zwischen n und $n!$ mindestens eine Primzahl liegt.

Aufgabe 2. — 5 Punkte

Seien $u, v, w \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(1) $\mathrm{ggT}(u^2, v) = \mathrm{ggT}(u, v)$
(2) $\mathrm{ggT}(u^2, v^2) = \mathrm{ggT}(u, v)^2$
(3) $u^3 | v^3 \Rightarrow u | v$
(4) $u^3 | v^2 \Rightarrow u | v$
(5) $u^2 | v^3 \Rightarrow u | v$

Aufgabe 3. — 2+2+2 Punkte

φ bezeichne die Eulersche Funktion.

(1) Bestimmen Sie die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 20\}$.
(2) Zeigen Sie: $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(\mathrm{ggT}(m, n)) \cdot \varphi(\mathrm{kgV}(m, n))$.
(3) Seien nun $m, q \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, q) = 1$.
Zeigen Sie, dass es dann eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $0 < n < q$ und $m \cdot n \equiv 1 \mod q$.

Aufgabe 4. — 2+2 Punkte

(1) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{N}$, die folgendes Kongruenzsystem erfüllen:

$$x \equiv 1 \mod 7 \qquad x \equiv 4 \mod 15$$
$$x \equiv 2 \mod 8 \qquad x \equiv 3 \mod 13.$$

(2) Ist das folgende System lösbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{N}$.

$$x \equiv 3 \mod 8 \qquad x \equiv 3 \mod 9$$
$$x \equiv 4 \mod 11 \qquad x \equiv 3 \mod 4.$$