Reinhard Nabben,
Sommersemester 2005

Einführung in die Numerische Mathematik

11. Übung

Aufgabe 1: Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Lösung von $A\,x = b$ und die Inverse von A.

b) Für die Störung $\delta b = 10^{-3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ der rechten Seite lösen Sie das gestörte Gleichungssystem $A\,\hat{x} = b + \delta b$ und bestimmen sie die Störung $\delta x = \hat{x} - x$ sowie deren Norm bzgl. $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_\infty$.

c) Erklären sie den relativen grossen Fehler δx im Vergleich zu δb.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: In einem Experiment werden folgende Messwerte $(x; y)$ ermittelt:

$$(2;\ 2,5) \qquad (3;\ 3,3) \qquad (5;\ 4,8) \qquad (8;\ 9,5) \quad .$$

Es wird ein linearer Zusammenhang $y = a\,x + b$ vermutet. Bestimmen Sie die Gerade so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird. Skizzieren Sie die Messwerte und die Ausgleichsgerade. (6 Punkte)

Aufgabe 3: Sei A eine komplexe $m \times n$–Matrix, $m \geq n$. Zeige: Es gibt eine unitäre $m \times m$ Matrix U sowie eine unitäre $n \times n$ Matrix V und eine $m \times n$ Matrix D mit

$$D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $D_r = \text{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, so daß

$$A = UDV^H.$$

Die σ_i sind eindeutig bestimmt (sie heißen Singulärwerte).

Hinweis: Betrachte $A^H A$. Dieser Term ist positiv semidefinit, besitzt nur nicht-negative Eigenwerte $(\lambda_i(A))$ und ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren.

(7 Punkte)

Aufgabe 4: Sei A eine reelle $m \times n$–Matrix, $m \geq n$. Zeige:

a) Es gibt genau eine $n \times m$ Matrix X, die folgende vier Gleichungen erfüllt

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^H = AX, \quad (XA)^H = XA.$$

Diese Matrix heißt Moore-Penrose Inverse oder verallgemeinerte Inverse von A und wird mit A^+ bezeichnet.

Hinweis: Verwende Aufgabe 3 und betrachte VD^+U^H mit

$$D^+ = \begin{bmatrix} (D_r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ist rang $A = n$, so ist $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$.

c) $A^+ b$ ist eine Lösung von $||Ax - b||_2 = Min$. (7 Punkte)

Aufgabe 5P: Bestimme die Lösung des $n \times n$ Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 4-n \\ 2-n \end{bmatrix}$$

für verschiedene n mit GE. Vergleiche mit der exakten Lösung.