

## Kontrolltheorie

### 2. Übungsblatt zur Vorlesung

Besprechung des Übungsblattes in der Übung am 16.05.2006

#### Aufgabe 1: (Kalman-Zerlegung)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$  und  $\text{Rang}([B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]) = r < n$ . Zeige:  
Es gibt eine orthogonale matrix  $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ , so dass

$$V^T A V = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad V^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $A_1 \in \mathbb{R}^{r,r}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{r,m}$  und das System  $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$  ist steuerbar.

#### Aufgabe 2: (Steuerbarkeit für die LTI Systeme)

Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für das LTI System  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

- Das LTI System ist steuerbar.
- $\text{Rang}([B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]) = n$ .
- Falls  $p \neq 0$  ein Eigenvektor von  $A^T$  ist, dann gilt  $p^T B \neq 0$ .
- $\text{Rang}([A - \lambda I, B]) = n$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

#### Aufgabe 3: (Steuerbarkeit)

Überprüfe die folgenden Systeme auf Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit.

a)  $\dot{x} = x + [0, 0, \dots, 0, 1]^T u$

b)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

c)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} u$