Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

SS 2007
10.06.2007

StRiH. A. Gündel-vom Hofe

Eine Übersicht zu den Themen der „Analysis III“

Es folgt eine Übersicht über die jeweils in den Vorlesungen behandelten Begriffe und Sätze (wichtig zur Klausurvorbereitung):

- *16./18.04.07:*

  Extremwerte *auf kompakten Mengen:* Wiederholung „relative“ Extrema im Innern $\overset{\circ}{B}$ von $B \subset \boldsymbol{R}^2$; Beschreibung des Randes ∂B von B durch eine Nebenbedingung der Form $g\,(x,y) = 0$; Extremwerte auf dem Rand ∂B von $B \rightarrow$ relative Extrema unter einer Nebenbedingung; anschauliche Herleitung der Lagrange-Gleichung $\boxed{\nabla f\,(a) = \lambda \cdot \nabla g(a)}$; Methode des Lagrange'schen Multiplikators; Anwendungsbeispiele mit Überprüfung der Extremaleigenschaft;

- *23./25.04.07:*

  Satz über implizite Funktionen*:* Frage nach der (Auf-)Lösbarkeit eines nichtlinearen Gleichungssystems $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$; zunächst anschauliche Herleitung der Bedingung für die Auflösbarkeit einer impliziten Gleichung der Form $f\,(x,y) = 0$ nach x bzw. y ; implizites Differenzieren; Formulierung des Satzes über implizite Funktionen für eine vektorwertige Abbildung $\boldsymbol{f} : G \rightarrow \boldsymbol{R}^m$; 1.Teil des Beweises;

- *30.04./02.05.07:*

  Satz über implizite Funktionen*:* 2.Teil des Beweises;

  Flächenparametrisierungen *und* ***Untermannigfaltigkeiten****:* Parametergebiet; glattes parametrisiertes Flächenstück; Dimension und Spur eines Flächenstücks; p-dimensionale glatte Fläche, Untermannigfaltigkeit (UM), Hyperfläche; Beispiel: Graph einer stetig diff'baren Funktion als Hyperfläche; Hinreichendes Kriterium zur Darstellung einer UM $M \subset B$, $B \subset \boldsymbol{R}^n$ offen, als Nullniveaumenge $N_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\{\boldsymbol{0}\})$ einer stetig diff'baren vektorwertigen Abbildung $\boldsymbol{f} : B \rightarrow \boldsymbol{R}^q$; Beispiele;

- *07.05./09.05.07:*

  Flächenstücke *und* ***Tangentialräume****:* Satz über die Darstellung von Flächenstücken als lokale Niveauflächen; Tangentialvektoren an eine UM M von $B \subset \boldsymbol{R}^n$ in einem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in M$ und ihre Charakterisierung; Tangentialraum und Tangentialhyperebene (THE); Beispiele $\rightarrow$ insbesondere (s. UE / Tut) der Tangentialraum $T_{E_n}(\mathrm{O}(n))$ der schiefsymmetrischen Matrizen im Punkt E_n an die UM $M = \mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Matrizen (orthogonale Gruppe);

  Parameterwechsel, Codimension*:* Satz über die lokale Diffeomorphie zweier sich überlappender lokaler Parametrisierungen einer p-dim. UM $M \subset B,\ B \subset \boldsymbol{R}^n$; die Codimension einer UM $M \subset B,\ B \subset \boldsymbol{R}^n$; die alternative Charakterisierung einer UM M von $B \subset \boldsymbol{R}^n$ mittels der Codimension $q = n - p$ (s. UE / Tut).

© aktueller Stand: *10.06.2007*

- *14.05./16.05.07:*

  ***Diff'bare Funktionen auf UM'en**:* Die Diff'barkeit einer auf einer UM M definierten Funktion; Unabhängigkeit der Definition von der Parametrisierung der UM;

  ***Extremwerte unter Nebenbedingungen (allgemeiner Fall)**:* Relative Extrema unter Nebenbedingungen $\rightarrow$ Relative Extremwerte auf einer UM $M \subset \boldsymbol{R}^n$; Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren als notwendige Bedingung für relative Extrema unter Nebenbedingungen; Beispiele samt Möglichkeiten des Tests auf relative Extremwerte;

  Vektorfelder und Kurvenintegrale**:* Vektorfelder (VF) $\rightarrow$ speziell Gradientenfelder; Übersicht über die Differentialoperatoren ***grad , *div* und ***rot*** ; anschauliche (physikalische) Interpretation zu *div* $\boldsymbol{F}$ (= Quelldichte) und ***rot*** $\boldsymbol{F}$ (= Rotationsanteil) bei gegebenem VF $\boldsymbol{F}$; das vektorielle Kurvenintegral (KI) $\int_{\alpha} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{x}$ eines VF'es $\boldsymbol{F}$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges α ; Erinnerung an das „skalare" Kurvenintegral $\int_{\alpha} f\, ds$ aus Analysis II;

- *21.05./23.05.07:*

  ***Vertiefung Kurvenintegrale**:* $\int_{\alpha} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{x}$ als Arbeitsintegral; alternative Schreibweise $\int_{\alpha} F_1\, dx_1 + \ldots + F_n\, dx_n = \int_{\alpha} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{x}$ für stetige VF'er $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) : G \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ auf einem Gebiet $G \subset \boldsymbol{R}^n$; alternative Definition des vektoriellen KI's mittels Riemannscher Summen; Erweiterung des KI's auf Integrationswege; die „Zirkulation einer Strömung"; Eigenschaften des (vektoriellen) KI's; der Hauptsatz über Kurvenintegrale (HSKI) und die Wegunabhängigkeit des KI's; der Hauptsatz der Diff'- und Int'-rechnung (HSDI) in $\boldsymbol{R}$ als Spezialfall des HSKI; Sterngebiet = sternförmiges Gebiet; Potentialfunktion = Stammfunktion eines VF'es $\boldsymbol{F}$; notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Existenz einer Stammfunktion;

- *30.05.07:*

  ***Stammfunktion**:* Beispiel zur Berechnung einer Stammfunktion zu einem VF $\boldsymbol{F}$;

  ***Parameter-(abhängige) Integrale**:* Das Parameterintegral (PI); Stetigkeit und Differentiation des PI's; eine Anwendung von PI'en : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ (s. Tut);

- *04.06./06.06.07:*

  ***Parameterintegrale* (*Fortsetzung*)**:* Satz von Fubini für stetige Funktionen; Normalbereiche; die Leibniz'sche Formel zur Integration über einem Normalbereich;

  ***Pfaff'sche Formen**:* Pfaff'sche Form (PF) = 1-Form = Differentialform 1. Stufe $\omega : B \times \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$; die PF $\omega_{\boldsymbol{F}}$ für stetige VF'er $\boldsymbol{F} : B \rightarrow \boldsymbol{R}^n$, $B \subset \boldsymbol{R}^n$; das totale Differential $d f : B \times \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ für stetig diff'bares $f : B \rightarrow \boldsymbol{R}$ als PF; Spezialfall: die Projektion(sabbildung) $\pi_i\ (\boldsymbol{x}) = x_i$ mit dem totalen Differential $d\, x_i = d\, \pi_i$;

Interpretation von *„f dt“* im gewöhnlichen (Riemannschen) Integral als PF; die Menge $\Omega^1(B)$ der 1-Formen auf B als Modul über dem Ring $\mathcal{C}(B)$ der auf B stetigen Funktionen; die Bilinearform als PF; der Darstellungssatz für PF'en; das Integral $\int_{\alpha} \omega$; die Transformation einer PF $\omega \in \Omega^1(B)$ nach $U \subset \boldsymbol{R}^p$, U offen ; der Satz über die „Verpflanzung“ des totalen Differentials einer stetig diff'baren Funktion $f : B \to \boldsymbol{R}$ mittels $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$, $U \subset \boldsymbol{R}^p$, $\varphi(U) \subset B$, $\mathcal{C}^1(U)$; Spezialfall: $\varphi^*(d f) = d(f \circ \varphi)$; geschlossene und exakte PF ;

- *11.06./13.06.07:*

Pfaff'sche Formen (***Fortsetzung***)*:* Die eineindeutige Zuordnung zwischen Pfaff'schen $\omega \in \Omega^1(B)$ und (stetigen) Vektorfeldern $\boldsymbol{F} : B \to \boldsymbol{R}^n$; Interpretation der Exaktheit und Geschlossenheit einer PF ω mittels der Theorie der VF'er; der Zusammenhang zwischen Exaktheit und Geschlossenheit im „Raum“ $\Omega^1(B)$; Satz über die Invarianz der Exaktheit und Geschlossenheit von PF'en; der Zusammenhang zwischen Exaktheit und Geschlossenheit in zu Sterngebieten diffeomorphen Gebieten;

Das Lebesgue-Integral (***Übersicht***)*:* Die Grundideen von H. Lebesgue und B. Riemann zur Approximation des Flächeninhalts unterhalb des Graphen einer beschränkten Funktion; ein (moderner) maßtheoretischer Überblick: „messbarer Raum“ $(X, \mathcal{M})$ versus „topologischer Raum“ $(X, \mathcal{O})$; σ-Algebra versus Topologie; „messbare Abbildung“ versus „stetige Abbildung“; positives Maß $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ mit σ-Additivität; Begriff des Maßraumes; die von einer Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra $E(\mathcal{F})$; wichtiger Spezialfall: die von einer Topologie $\mathcal{O}$ erzeugte Borel-Algebra $E(\mathcal{O})$ der Borelmengen; stetige Abbildungen als bzgl. $E(\mathcal{O})$ messbare Abbildungen; die Mengen $F_\sigma(A_i)$ und $G_\delta(O_i)$ in der Borel-Algebra;