Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 05.07.2007
Abgabe: 12.07.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

12. Übung zur Analysis III

1. Präsentationsaufgabe

   Sei $(f_i)_{i\in I} \in L^1$ konvergent f.u. gegen f und es gelte

   $$\forall i \in I \qquad |f_i - f| \leq h, \quad 0 < h \in L^1$$

   Dann gilt: $f \in \text{Ł}^1$ und $(f_i)_{i\in I}$ darf gliedweise integriert werden.

   (5 Punkte)

2. (a) Zeige: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad f_n := (\cos^n x + \sin^n x)\chi_{[0,2\pi]} \in L^1$
   (b) Berechne $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

   (5 Punkte)

3. Sei $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}$,

   $$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \cap [0,1]^3 \\ 1 & x \in (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^c \cap [0,1]^3 \end{cases} \tag{1}$$

   Zeige: $f \in L^1$ auf $[0,1]$

   (3 Punkte)

4. Es sei I ein beschränktes Intervall und $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad f_i \in L^1$. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiere f.u. gegen f, und es gelte

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq M,\ M \in \mathbb{R}$$

   Dann gilt: $f \in L^1$ und $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ darf gliedweise integriert werden.

   (4 Punkte)