Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 03.05.2007
Abgabe: 10.05.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
Jose Mendez

3. Übung zur Analysis II

1. Präsentationsaufgabe

   (a) Man zeige: Durch $\boldsymbol{\phi} : (0,\pi) \times (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

   $$\boldsymbol{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r\sin v \end{pmatrix} \qquad R, r \in \mathbb{R} \quad R > r > 0 \ \text{ fest}$$

   wird ein glattes Flächenstück der Dimension $p = 2$ im $\mathbb{R}^3$ definiert.

   (b) Man gebe eine geometrische Beschreibung von $S = \boldsymbol{\phi}(P)$
   $P = (0,\pi) \times (0,\pi)$.

   (c) Man finde, ausgehend von der obigen Parametrisierung, eine implizite Darstellung für S. Genauer: Bestimme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\})$ mit
   $S = N_0(f) = f^{-1}(0)$, $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in S$.

   (6 Punkte)

2. Durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen beweise man folgende Aussage:
   Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in I mit $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in I$. Dann existiert lokal die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ mit $y_0 = f(x_0)$ und
   $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

   (5 Punkte)

3. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + px + q$. Beweise unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen, dass f für $x \neq \frac{-p}{2}$ lokal nach x, als Funktion von p und q auflösbar ist.

   (4 Punkte)

4. Sei $f(x,y) = 1 - x^2 + 0,2y^2$ und $g(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$. Zeichne die Niveaulinien und 3-D Flächendarstellung von f bzw. g im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$ und bestimme ∇f und ∇g

   (4 Punkte)