Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 10.05.2007
Abgabe: 17.05.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

4. Übung zur Analysis III

1. Präsentationsaufgabe

   (a) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene $T_{\mathbf{p}_0}$ an dem in der 1. Aufgabe vom 3. Blatt definierten Torus im Punkt $\mathbf{p}_0 = (\sqrt{2}+\frac{1}{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

   (b) Sei $z = f(x,y) = x^2y - 3y$. Bestimme die Gleichung der Tangentialebene $T_{\mathbf{p}_0}$ an dieser Fläche im Punkt $\mathbf{p}_0 = (4,3)$

   (4 Punkte)

2. (a) Sei $P \subset \mathbb{R}^p$. Man zeige: Durch $\boldsymbol{\phi} : P \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \\ g(u) \end{pmatrix} \quad f(u) > 0, \quad f'(u)^2 + g'(u)^2 > 0$$

   wird ein glattes Flächenstück der Dimension $p = 2$ im $\mathbb{R}^3$ definiert.

   (b) Man gebe eine geometrische Beschreibung von $S = \boldsymbol{\phi}(P)$

   (c) Man gebe ein Beispiel eines glattes Flächenstücks, das auf diese Art definiert wird an.

   (4 Punkte)

3. (a) Zeige, dass ein Punkt $x_0\mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$

   (b) Zeige, dass $\mathbb{R}^n$ eine glatte $n-$dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ ist.

   (c) Zeige, dass jede Koordinatenachse in $\mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist.

   (d) Zeige, dass jede Koordinatenebene in $\mathbb{R}^n$ eine glatte Fläche in $\mathbb{R}^n$ ist.

   (4 Punkte)

4. Seien $P = (-1,1) \times (0, 2\pi)$ ein Parametergebiet und $P' = (0,1) \times (0,\pi)$ sowie $\boldsymbol{\phi} : P \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\phi}(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} (2 - t_1 \sin\frac{t_2}{2})\cos t_2 \\ (2 - t_1 \sin\frac{t_2}{2})\sin t_2 \\ t_1 \cos\frac{t_2}{2} \end{pmatrix}$$

   eine glatte parametrisierte Fläche.

(a) Man gebe eine geometrische Beschreibung von $S = \boldsymbol{\phi}(P)$

(b) Man kann zeigen: Es existiert eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^3$ so dass $\boldsymbol{\phi}(P) = S \cap V \setminus \partial V$

(5 Punkte)