Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 17.05.2007
Abgabe: 24.05.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

5. Übung zur Analysis III

1. Präsentationsaufgabe
   Seien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x} = (a_1x_1, a_2x_2) \quad a_i, x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 2$ und $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die bilinieare Abbildung, die durch das kanonische Skalarprodukt definiert wird. Darüber hinaus sei $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ formal als $f(x_1, x_2) : U \to \mathbb{R}$ betrachtet mit $U \in \mathbb{R}^2$ offen und $f(x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Die Abbildung

   $$\Delta f := div\, grad\, f$$

   heisst Laplace-Operator Δ.

   (a) Bestimme $a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 2$ so dass $\Delta f = 0$ gilt.
   Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heisst harmonisch. Die Gleichung $\Delta f = 0$ heisst Potentialgleichung.

   (b) Sei $U \in \mathbb{R}^2$ offen und $f(x, y) := -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} \quad \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Zeige, dass f harmonisch ist.

   (c) Sei $U \in \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Es lässt sich zeigen, dass

   $$div\ rot\, \mathbf{v} = 0$$

   gilt.

(5 Punkte)

2. Seien $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ Zeige:

   (a) $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||| \sin \alpha|$, wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ist.

   (b) $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = \sqrt{< \mathbf{u}, \mathbf{u} >< \mathbf{v}, \mathbf{v} > - < \mathbf{u}, \mathbf{v} >^2}$.

   (c) $\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_i = 0$

   (d) $\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j = -(\mathbf{b}_j \times \mathbf{b}_i) \quad i \neq j$

(5 Punkte)

3. Es seien $c \in \mathbb{R}^{>0}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ und $\omega := c||\mathbf{k}||$ sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ eine beliebige Funktion. Man zeige:

   $$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (\mathbf{x}, t) \mapsto f(< \mathbf{k}, \mathbf{x} > -\omega t)$$

besitzt die Eigenschaft

$$\Delta F = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

Δ ist der Laplace-Operator $\Delta F := div\, grad\, F$. Diese Gleichung stellt eine Schwingungsgleichung dar.

(5 Punkte)

4. Es seien $\mathbf{F} = (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz^2)$, $\quad \boldsymbol{\alpha}(t) := (t, t^2, t^3)$ und $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,1,1)$. Bestimme die Werte $a, b \in (-2,2)$ von t, damit man

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t))\cdot\boldsymbol{\alpha}'(t)dt$$

das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ über $\boldsymbol{\alpha}$ von P_1 nach P_2 berechnen kann. Ändert sich etwas wenn das Kurvenintegral von $\mathbf{F}$ über $\boldsymbol{\alpha}$ von P_2 nach P_1 berechnet wird?

(4 Punkte)