Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 07.06.2007
Abgabe: 14.06.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

8. Übung zur Analysis III

1. Präsentationsaufgabe
   Seien $U \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $\boldsymbol{\phi} : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\boldsymbol{\phi}(U) \subset B$. Zeigen Sie:

   (a) Für jede 1-Form $\omega \in \Omega^1(B)$ wird durch

   $$\boldsymbol{\phi}^*(\omega) : U \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R},$$

   $$\boldsymbol{\phi}^*(\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \omega(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), D\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})(\mathbf{v}))$$

   eine 1-Form $\boldsymbol{\phi}^*(\omega) \in \Omega^1(U)$ definiert.

   (b) $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(B) \qquad \boldsymbol{\phi}^*(\omega_1 + \omega_2) = \boldsymbol{\phi}^*(\omega_1) + \boldsymbol{\phi}^*(\omega_2)$.

   (c) $\forall \omega \in \Omega^1(B)\ \forall f \in \mathcal{C}(B) \qquad \boldsymbol{\phi}^*(f \cdot \omega) = \boldsymbol{\phi}^*(f) \cdot \boldsymbol{\phi}^*(\omega)$.

   (d) $\forall f \in \mathcal{C}^1(B) \qquad \boldsymbol{\phi}^*(df) = d(\boldsymbol{\phi}^*(f))$ mit $\boldsymbol{\phi}^*(f) = f \circ \boldsymbol{\phi}$.

   (5 Punkte)

2. Seien $\omega_1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\})$ und $\omega_2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\})$ mit

   $$\omega_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \qquad \omega_2 = -\frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

   (a) Untersuchen Sie, ob ω_1 und ω_2 geschlossen bzw. exakt sind.

   (b) Für $\boldsymbol{\psi}_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}, \quad \boldsymbol{\psi}_1(r, \phi) = (r \cos\phi, r \sin\phi)$ und
   $\boldsymbol{\psi}_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}, \quad \boldsymbol{\psi}_2(r, \phi, \theta) = (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta)$
   berechne ${\boldsymbol{\psi}_1}^*(\omega_1)$ und ${\boldsymbol{\psi}_2}^*(\omega_2)$.

   (5 Punkte)

3. Seien $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1} \circ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie: Wenn jede geschlossene Form auf U exakt ist, dann ist jede geschlossene Form auf $f(U)$ exakt.

   (5 Punkte)

4. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} = (1, 2)$ und $\mathbf{b} = (3, 4)$ und $\omega = \omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega_1 = (6xy^2 - y^3)dx$ und $\omega_2 = (6x^2y - 3xy^2)dy$ sowie $\boldsymbol{\alpha}$ ein beliebiger Weg von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$. Berechne

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega$$

(4 Punkte)