Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

Übung zur Analysis III

Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gilt;

$$f \quad \text{ist Riemann-integrierbar} \Leftrightarrow f \quad \text{f.u. stetig}$$

Beweis.

$\Rightarrow$ Wurde in der Übung gezeigt.

$\Leftarrow$ Wir verwenden die im ersten Beweisteil definierte Funktionen und Notation. Insbesondere $u_k(\mathbf{x})$

Sei $N_1 \subset Q$ eine Nullmenge und f f.u. stetig auf Q, d.h. f auf $Q \backslash N_1$ stetig und $(\mathfrak{Z}_k)$ Zerlegungen mit $\mu_j(\mathcal{H}) \to 0$, wobei $\mathcal{H}$ die Hyperfächen sind, die Seiten der Teilquader sind und es gelte:

$$\lim_{k\to\infty} U(f, (\mathfrak{Z}_k)) = I_*(f)$$

und

$$\lim_{k\to\infty} O(f, (\mathfrak{Z}_k)) = I^*(f)$$

Es sei N_2 die Vereinigung der Seitenwände aller Teilquader aller Zerlegungen $(\mathfrak{Z}_k)$ und

$N := N_1 \cup N_2$. Es gelte:

$$\forall \mathbf{x}_0 \in Q \backslash N \qquad \forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad (|f(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}_0)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap Q)$$

Sei k_0 geignet, d.h. $(\mathfrak{Z}_{k_0})$ geignet, so dass für alle $k \geq k_0 \qquad B_\delta(\mathbf{x}_0)$ einen Teilquader Q_j der Zerlegung $\mathfrak{Z}_k$ enthält, mit $\mathbf{x}_0 \in Q_j$.
Wir erhalten:

$$h_k(\mathbf{x}_0) = v_k(\mathbf{x}_0) - u_k(\mathbf{x}_0) = M_j - m_j \leq |M_j - f(\mathbf{x}_0)| + |m_j - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon.$$

und

$$k \to \infty \Rightarrow (h_k) \to^{f.u.} 0 \qquad \text{bzw.} \lim_{k \to \infty} (h_k) = 0 \quad \text{auf}\, Q \backslash N$$

$\square$