TU Berlin
Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2
Dr. Brigitte Lutz-Westphal
Andreas Fest
Andrea Hoffkamp

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/DiskrMaLS/

1. Programmier-Übung zur Vorlesung Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen Sommersemester 2007

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
Eine allgemeine Drei-Term-Rekursion ist eine rekursiv definierte Folge der Art

$$x_{k+2} + a_k x_{k+1} + b_k x_k + c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

mit gegebenen Koeffizienten a_k, b_k, $c_k \in \mathbb{R}$ und Anfangswerten x_0, $x_1 \in \mathbb{R}$. Wir wollen uns auf einfache Drei-Term-Rekursionen der Art

$$x_{k+2} + a x_{k+1} + b x_k = 0$$

bzw.

$$x_{k+2} = -a x_{k+1} - b x_k$$

beschränken. Diesen Fall nennt man homogene Drei-Term-Rekursion mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Schreibt in CindyScript ein Programm, das die ersten n=50 Folgenglieder in der Zeichenoberfläche zeichnet, d.h. zeichnet die Punkte (k, x_k) für $k = 0, 1, ..., n$.

Die Werte für a, b, x_0, x_1 und n sollt dabei am Anfang des Programms selbst festlegen. Verwendet zunächst die Werte $a = -1$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$. Probiert anschließend andere Werte aus und schaut euch das Ergebnis an.

Könnt ihr euer Programm so abwandeln, dass – egal für welche Angabe von n – stets alle Punkte im Bereich $[0, 10]$ der x-Achse gezeichnet werden?

b) Die in a) gezeichneten Punkte scheinen auf einer Kurve zu liegen. Ihr sollt diese Kurve (die sogenannte geschlossene Lösung) im nächsten Schritt zeichnen.

Die Eigenwerttheorie für die Drei-Term-Rekursion besagt, dass man sich zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms als

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ansehen muss. Nun unterscheiden wir, ob dieses Polynom zwei verschiedene (eventuell komplexe!) Nullstellen hat oder eine doppelte.

Wenn das Polynom nur eine doppelte Nullstelle λ hat, so erhalten wir die geschlossene Lösung

$$f(x) = (x_0 - (x_0 + x_1)x)\lambda^x.$$

Haben wir hingegen zwei Nullstellen λ_1 und λ_2 mit der Eigenschaft $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$, so können wir die geschlossene Lösung schreiben als

$$f(x) = re(\alpha\lambda_1^x + \beta\lambda_2^x)$$

mit $\alpha = \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - \lambda 1}$ und $\beta = x_0 - \alpha$.

Erweitert euer Programm aus a) so weit, dass die Eigenwerte berechnet werden und die jeweils passende geschlossene Lösung gezeichnet wird. Überlegt euch dazu zunächst, wie man herausbekommt, ob es eine oder zwei Nullstellen gibt.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist übrigens für Cinderella kein Problem. Ihr braucht euch also keine Gedanken zu machen, ob und wann eventuell eine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden könnte. Cinderella rechnet damit ganz normal weiter. (Dennoch schadet es nichts, sich mal zu überlegen, wann das passieren könnte, und warum am Ende – zumindest für ganzzahlige x-Werte – doch wieder etwas Reelles herauskommt!)

Wenn ihr die Funktion gezeichnet habt, dann vergleicht, ob die Punkte eurer rekursiven Folge auf der Kurve liegen. Probiert das wieder für verschiedene Parameter und Startwerte aus.

Wenn alles geklappt hat, probiert das Ganze noch einmal mit folgenden Werten aus: $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2} - 1$ ($\sqrt{(2)}$=`sqrt(2)`), $a = 2$, $b = -1$ und $n = 50$. Was passiert dort? Könnt ihr das erklären? (Dies ist nicht unbedingt ein Fehler in eurem Programm!)

c) (Zusatzaufgabe ohne Punkte) Könnt ihr euer Programm so erweitern, dass der Benutzer die Startwerte interaktiv eingeben kann? Verwendet z.B. ,,Schieberegler" in Form von Punkten auf einer Strecke.

Abgabe eurer Lösung: Schickt die Cinderella-Dateien zu den beiden Aufgabenteilen bis Donnerstag, 24. Mai 2007 per E-Mail an Andreas (fest@math.tu-berlin.de). Falls euer Programm nicht das gewünschte Ergebnis liefert, gebt es trotzdem ab!

Beschreibt auf alle Fälle auch, welche Schwierigkeiten ihr hattet, die Aufgabe zu lösen, und (eventuell) warum ihr daran gescheitert seid!