TU Berlin
Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2
Dr. Brigitte Lutz-Westphal
Andreas Fest
Andrea Hoffkamp

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/DiskrMaLS/

10. Übung zur Vorlesung Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen Sommersemester 2007

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Gegeben sei ein Graph mit Kantengewichten, die auch negativ sein dürfen.

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) Der Graph enthält einen negativen Zykel.

(ii) Der Graph enthält einen elementaren negativen Zykel.

(iii) Es gibt einen Knoten i mit $u_{ii}^{(n)} < 0$, wobei $U^{(n)}$ die Matrix ist, die der Bellman-Ford-Algorithmus berechnet.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Wir betrachten das folgende Rucksackproblem:

> Gegeben sind Objekte $\{1, 2, ..., n\}$ mit Gewichten $w_1, w_2, ..., w_n$. Außerdem hat jedes Objekt einen Wert $c_1, c_2, ..., c_n$. Wir haben einen Rucksack, den wir maximal mit einem Gewicht W beladen können.
>
> Welche Objekte müssen wir auswählen, um den Wert zu maximieren?

a) Zeigen Sie, dass das Problem die Eigenschaft der optimalen Substruktur hat, also dass folgendes gilt:

   Ist eine Auswahl $\{i_1, i_2 ..., i_{\ell-1}, i_\ell\}$ optimal für das gegebene Problem, so ist die Auswahl $\{i_1, i_2 ..., i_{\ell-1}\}$ optimal für das Problem auf $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{i_\ell\}$ mit maximalem Gewicht $W - w_{i_\ell}$.

Wir wollen nun aus dem Problem einen Graphen basteln. Dazu definieren wir uns Knoten (j, k) mit $j = 0, 1, ..., n$ und $k = 0, 1, ...C$ ($C = \sum_{i=1}^{n} c_i$), die später zu einer Teilmenge der Objekte $\{1, ..., j\}$mit dem Wert k gehören sollen. Dabei steht $j = 0$ für die leere Menge, also einen leeren Rucksack.

Außerdem fügen wir von jedem Knoten $(j - 1, k)$, bei dem das möglich ist, folgende zwei Kanten ein:

$(j-1,k) \to (j,k)$ Eine solche Kante bekommt das Gewicht 0. Sie bedeutet, dass Objekt j nicht in den Rucksack kommt und somit der Wert des Rucksacks gleich bleibt.

$(j-1,k) \to (j,k+c_j)$ Eine solche Kante bekommt das Gewicht w_j. Sie bedeutet, dass Objekt j in den Rucksack kommt und sich somit der Wert erhöht.

b) Konstruieren Sie den Graphen für folgende Instanz des Rucksackproblems.

i	1	2	3	4	5
c_i	1	3	2	2	1
w_i	3	2	3	1	2

Knoten, die von $(0,0)$ aus nicht erreichbar sind, sollen Sie dabei weglassen!

c) Bestimmen Sie in dem Graphen einen Kürzesten-Wege-Baum mit Startknoten $(0,0)$ und interpretieren Sie das Ergebnis für das Rucksackproblem.

d) Welcher Wert passt in einen Rucksack mit maximalem Gewicht von 5?
Welche Gewichtskapazität muss ein Rucksack haben, wenn mit ihm ein Wert von mindestens 4 transportiert werden soll?
Welche Gewichtskapazität muss ein Rucksack haben, wenn mit ihm ein Wert von genau 4 transportiert werden soll?

Geben Sie jeweils als Begründung einen passenden Knoten im Graphen und eine entsprechende Auswahl von Objekten an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Wir betrachten das folgende Subset-Sum-Problem:

Gegeben sind natürliche Zahlen $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ und $K \in \mathbb{N}$.
Gibt es eine Teilmenge N von M mit $\sum_{a \in N} a = K$?

a) Zeigen Sie, dass Subset-Sum in $\mathcal{NP}$ liegt, in dem Sie ein Zertifikat angeben, mit dem sich eine Ja-Instanz in polynomieller Zeit verifizieren läßt.

b) Wie kann man Subset-Sum auf ein Rucksackproblem zurückführen und mit dem Verfahren aus Aufgabe 2 lösen?

Abgabetermin: Am Donnerstag, den 28. Juni **vor Beginn** der Vorlesung.