TU Berlin
Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2
Dr. Brigitte Lutz-Westphal
Andreas Fest
Andrea Hoffkamp

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/DiskrMaLS/

3. Übung zur Vorlesung
Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen
Sommersemester 2007

Am Do, den 10.5. findet zu Beginn der Vorlesung der erste Kurztest statt.

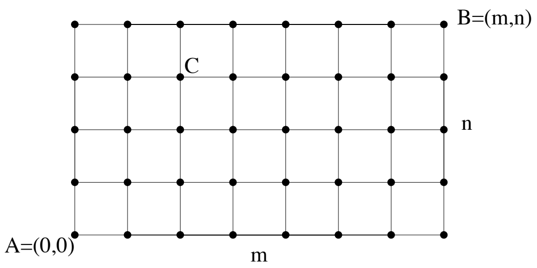
Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es in jedem einfachen Graphen mit $n \geq 2$ Knoten immer zwei Knoten gibt, welche denselben Grad haben.

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \geq 2$ immer einen Graphen gibt, der $n-1$ verschiedene Grade hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Viele Identitäten für Binomialkoeffizienten können durch Abzählen von Gitterwegen gewonnen werden. Betrachten wir ein $m \times n$-Gitter, z.B. für $m = 7, n = 4$:



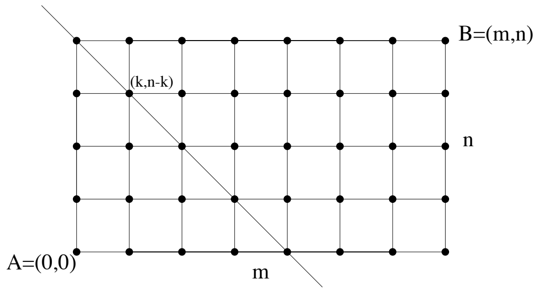
In der Übung wurde gezeigt, dass die Anzahl der verschiedenen Wege von $A = (0, 0)$ nach $B = (m, n)$, die stets nach rechts oder nach oben gehen, gleich $\binom{m+n}{n}$ ist. Für $m = 7, n = 4$ haben wir also $\binom{11}{4}$ Wege.

a) Sei $C = (k, l)$ der Punkt, den man erreicht, wenn man k-mal nach rechts und l-mal ($0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq n$) nach oben geht. Wie viele verschiedene Wege in einem $m \times n$-Gitter von A nach B gibt es, die den Punkt C durchlaufen?

b) Beweisen Sie mit der Gittermethode die sogenannte Vandermonde-Identität:

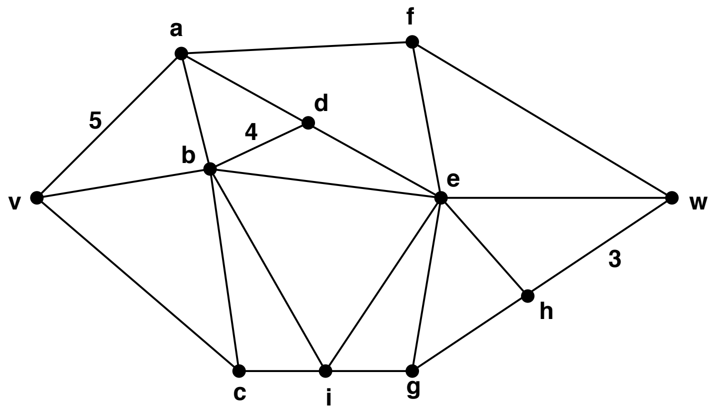
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{m+n}{n}$$

Tipp: Alle Wege von A nach B kreuzen genau einmal die im folgendem Gitter eingezeichnete Diagonale. Klassifizieren Sie die Wege nach ihrem Kreuzungspunkt mit der Diagonalen.



Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Setzen Sie in folgendem Graphen die restlichen Kantengewichte so, dass der Algorithmus von Dijkstra den Weg $v, a, d, e, b, i, g, h, w$ konstruiert. Verwenden Sie möglichst niedrige Kantengewichte. Spielen Sie den Algorithmus einmal (nachvollziehbar) durch.



b) Begründen Sie, warum beim Algorithmus von Dijkstra negative Kantengewichte nicht zugelassen sind.

Abgabetermin: Am Do, den 10. Mai **vor Beginn** der Vorlesung.