7.8. Einführung in die Theorie der Fourierreihen

8.1. ~~Problem~~stellung

Das System der Funktionen

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \dots$$

ist orthogonal auf $[-\pi,\pi]$: Man erhält nämlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin kx\,dx = 0 \quad, k\in\mathbb{N} \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,\cos \ell x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,\sin \ell x\,dx = \begin{cases} 0 & k\neq \ell \\ \pi & k=\ell \end{cases} \tag{2}$$

"halbe Periodenlänge"

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,\sin \ell x\,dx = 0 \qquad \forall k,\ell\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$$

Man kann nun Funktionen $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit der Periode 2π in eine Reihe nach Funktionen dieses Systems entwickeln.

Fragestellung: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π. Kann man reelle Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestimmen, so daß

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right)} \quad (*) \ ?$$

Formale Bestimmung der a_i, b_i: Vertauschung von Integration u. Summation sei erlaubt, sei $f\in\mathcal{R}$ auf $[-\pi,\pi]$.

Multipliz. $(*)$ mit 1, Integr. $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{(1)}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + 0 = \pi\cdot a_0$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

Mult. mit $\cos mx$, Integr.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \underset{(1)-(3)}{=} 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \cdot a_m\,dx + 0 = a_m \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} m &= 0,1,2,\ldots \\ m &= 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Analog

$(\cos 0x \equiv 1)$

Def 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π, $f \in \mathcal{R}$ auf $[-\pi, \pi]$. Die oben definierten Zahlen a_m, b_m heißen Fourierkoeffizienten von f bezügl. des Systems $\{1, \cos x, \sin x, \ldots\}$.

Wir schreiben

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Der rechts stehende Ausdruck heißt Fourierreihe von f.

Bemerkung Da wir die Fourierkoeff. ohne Kenntnis der Konvergenz der Fourierreihe nur formal bestimmt haben, können wir diese durch $\sim$ der Fkt f nur formal zuordnen. Wir wissen zunächst weder, ob diese konvergiert noch ob Gleichheit anstelle $\sim$ gilt.

Def 2: Die n-te Partialsumme wird bez. mit

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Solch ein Ausdruck heißt auch trigonometrisches Polynom.

8.2. Dirichlets Integral und -Kern.

Umformung der Partialsumme S_n: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest.

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m x_0 + b_m \sin m x_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{m=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du\Big)\cos m x_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du\Big)\sin m x_0\Big\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\underbrace{(\cos mu \cos m x_0 + \sin mu \sin m x_0)}_{=\cos m(u-x_0)}\Big\} f(u)\,du$$

Nun gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{(o.w.)}$$ Fi III. S. 418 Ü.A.

$$\Rightarrow \qquad =: \mathcal{D}_n(x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Def. Die eben eingeführte Fkt $\mathcal{D}_n(x)$ heißt Dirichletscher Kern

$$\Rightarrow \quad S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(u-x_0) f(u)\,du \qquad \text{Dirichletsches Integral}$$

Bemerkung Ist $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch u. integrierbar, dann

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} \varphi(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\,du \qquad (a \in \mathbb{R}) \qquad \text{(o.w.)}$$ "Ü.A."

$$\Rightarrow \quad S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \mathcal{D}_n(\underbrace{u-x_0}_{t}) f(u)\,du \qquad (\mathcal{D}_n \cdot f \ 2\pi\text{-per.})$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(t) f(x_0+t)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}\Big)$$

$t' = -t$, $\mathcal{D}_n$ gerade

$$\boxed{S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(t)\{f(x_0+t) + f(x_0-t)\}\,dt}$$

Beachte: Der Integrand selbst besitzt für $n \to \infty$ keinen Grenzwert, dennoch werden wir $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$ untersuchen!

8.3. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Satz 1 (Riemann) Sei $f \in \mathcal{R}$ auf $[a,b]$. Dann

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt = 0$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt = 0.$$

Beweis: Zeigen nur die obere Abschätzung. Die untere geht völlig analog. Sei $[\alpha, \beta]$ bel. endl. Intervall. Dann

$$\left| \int_\alpha^\beta \sin \lambda t \, dt \right| = \left| \frac{\cos \lambda \alpha - \cos \lambda \beta}{\lambda} \right| \leq \frac{2}{\lambda}$$

Sei P eine bel. Zerlegung von $[a,b]$, m_i, M_i seien die entspr. Infima und Suprema.

$$\int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - m_i) \sin \lambda t \, dt + \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t \, dt$$

(Sei $\omega_i = M_i - m_i \Rightarrow$) $f(t) - m_i \leq \cancel{\omega_i}\ M_i - m_i$ auf $[t_{i-1}, t_i]$.

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \cancel{\omega_i}\,(M_i - m_i) \Delta t_i + \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n |m_i|$$

Geben nun ε vor. $f \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists P : O(P) - U(P) < \varepsilon$. Für dieses P:

$$\sum \cancel{\omega_i}\,(M_i - m_i) \Delta t_i < \varepsilon / 2$$

Nun bleibt n fest, damit ist $\sum_1^n |m_i|$ endlich. Wählen λ_0 so, daß

$$\frac{2}{\lambda_0} \sum_1^n |m_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt offenbar

$$\left| \int_a^b f \sin \lambda t \, dt \right| < \varepsilon \qquad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \ldots = 0. \qquad \square$$

(*) b.w.

Folgerung: $\boxed{\text{Sei } f \in \mathcal{R} \text{ auf } [-\pi, \pi]. \text{ Dann gilt für die Fourierkoeff. } \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0.}$

Kann man daraus schon die Konvergenz der Fourierreihe folgern?

Verallgemeinerung

Satz 1 bleibt auch gültig, wenn $f \in \mathcal{R}$ auf $[a+\delta, b]$ $\forall\, 0<\delta<b-a$ und das (uneigentliche) Integral

$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$

konvergent ist.

Denn: Aufspaltung $\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \le \left|\int_a^{a+\delta} f(t)\sin\lambda t\,dt\right| + \left|\int_{a+\delta}^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right|$

$$\le \underbrace{\int_a^{a+\delta} |f(t)|\,dt}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2}\\ \text{für } \delta \text{ hinr. klein}}} + \underbrace{\left|\int_{a+\delta}^b f \sin\lambda t\,dt\right|}_{\substack{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } \lambda \text{ hinr. groß}\\ \text{(Satz 1)}}} < \varepsilon$$

$\square$

Def 1: Sei f wie bisher, $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$S := \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } f \text{ in } x_0 \text{ stetig.} \\ \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right) & \text{falls } f \text{ in } x_0 \text{ eine Unstetigkeitsst. 1. Art hat.} \end{cases}$$

Offenbar sind beide Fälle in $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+\ldots)$ enthalten!

Besser: $S := \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$
$\Rightarrow$ $S = f(x_0)$, falls f stetig in x_0.

$$\varphi(t) := f(x_0+t)+f(x_0-t) - 2S.$$

Bemerkung: In jedem der beiden Fälle gilt offenbar $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = 0$.

Satz 2: ~~Hat~~ f in x_0 ~~höchstens~~ stetig oder hat dort eine Unstetigkeitsstelle 1. Art, dann konvergiert die Fourierreihe von f im Punkt x_0 gegen S, wenn $\exists h>0$, so daß

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$

konvergent ist.

Beweis: Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S$.

a) **Vorbetrachtung** Sei $f(x) \equiv 1$. Dann (Orthogonalität!)

$a_0 = 2$, $a_n, b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow S_n(x) \equiv 1 \quad \forall n$

Wegen der Darstellung von S_n durch Dirichlets Integral folgt daraus (mit $f \equiv 1$)

$f(+0)+f(-0) = 2$ $\qquad$ $S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n \left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right) dt$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt \qquad \Big/ \cdot S_0$$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\cdot 2S_0\,dt$$

$$\Rightarrow S_n(x_0) - S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\underbrace{\left\{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S\right\}}_{=\varphi(t)}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad (*)$$

b) $\underline{\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S}$: $\swarrow$ t borgen, um $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ zu bändigen

$$S_n(x_0) - S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t \cdot D_n(t) \cdot \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$$

V.W.

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}_{\substack{\to 1,\\ t\to 0\\ \text{(nicht sing)}}} \underbrace{\frac{\varphi(t)}{t}}_{\substack{\text{singulärer}\\ \text{Teil}}} \cdot \underbrace{\sin(n+\tfrac{1}{2})t}_{=\lambda\to\infty}\, dt$$

Nach Voraussetzg. an f ist $\varphi \in \mathcal{R}$ auf $[\delta, \pi]$, damit $\frac{|\varphi|}{t} \in \mathcal{R}$ auf $[\delta, \pi]$. $\int_0^h \frac{|\varphi|}{t} dt$ konvergent $\Rightarrow \int_0^\pi \frac{|\varphi|}{t} dt$ konv.

$\Rightarrow \int_0^\pi \left| \frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \frac{\varphi(t)}{t} \right| dt$ konvergent (Majorantenkrit)

Verallgemeinerung von Satz 1 $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) - S = 0 \qquad \square$$

Das Kriterium von Satz 2 ist für die Anwendung noch zu unhandlich. Man leitet aber schnell praktikable Bedingungen daraus her.

<u>Def 2</u>: Sei $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$. f heißt Hölder-stetig auf E, wenn $\exists\, L \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$, so daß

$$|f(x) - f(y)| \le L\, |x-y|^\alpha \quad \forall x, y \in E.$$

Für $\alpha = 1$ heißt f Lipschitzstetig.

<u>Satz 3</u>: Sei f wie bisher. Existiert eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$, so daß f sowohl auf $E_1 = U_\varepsilon \cap \{x \mid x < x_0\}$ als auch auf $E_2 = U_\varepsilon \cap \{x \mid x > x_0\}$ hölderstetig ist, dann konvergiert die Fourierreihe von f im Punkt x_0 gegen S, d.h. Bild!

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0) \qquad \text{falls } f \text{ in } x_0 \text{ stetig}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right) \qquad \text{falls in } x_0 \text{ Unstetigkeitsstelle 1. Art}$$

<u>Beweis:</u> Zeigen: $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}$ konvergent für hinr. kleines h:

$$= \int_0^h f(x_0+t) - 2\cdot\tfrac{1}{2} f(x_0+0) + f(x_0-t) - 2\cdot\tfrac{1}{2} (f(x_0-0))\, dt =$$

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt = \int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,dt$$

(Wegen $S = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$ in beiden Fällen)

$$\leq \int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,dt + \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,dt$$

Sei nun $h<\varepsilon$.

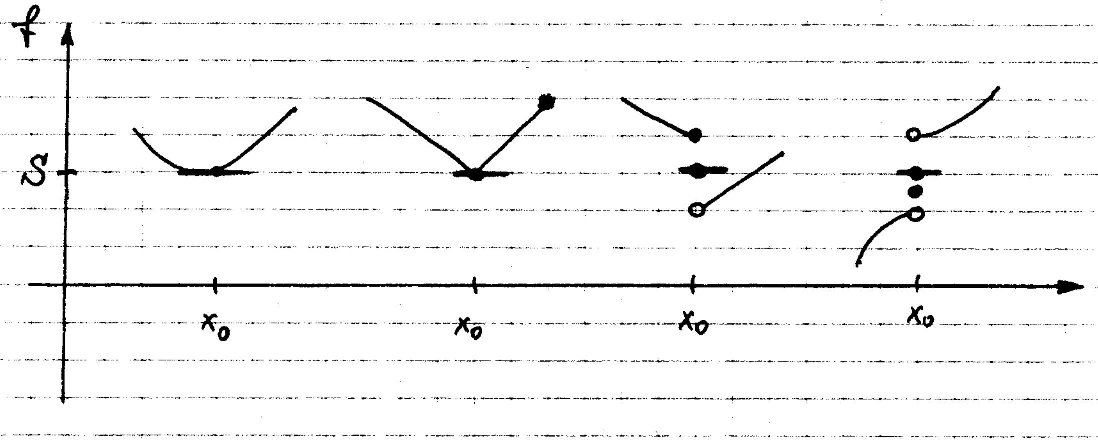
$$\leq \int_0^h L_1 \frac{1}{t^{1-\alpha_1}}\,dt + \int_0^h L_2 \frac{1}{t^{1-\alpha_2}}\,dt \,.$$

Beide Integrale sind konvergent, denn $\int t^{-(1-\alpha)}\,dt = \frac{1}{\alpha} t^{\alpha}$.

Satz 2 $\Rightarrow$ Konvergenzaussage $\square$

<u>Folgerung</u> Die Konvergenzaussage von Satz 3 gilt speziell dann, wenn f in x_0 die rechts- u. linksseitige Ableitung $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ in $\mathbb{R}$ besitzt; insbesondere, wenn f in x_0 diffbar ist.

[Denn: Dann ist f lipschitzstetig in ~~einer Umgebung von~~ einer links- u. einer rechtsseitigen Umgebung von x_0] [Warum?]



8.4. Einige Anwendungsbeispiele

Vorbemerkungen: Sei $u(x)$ ungerade Fkt. Dann $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0$. (klar)

$\Rightarrow$ Wenn $f(x)$ gerade, dann $f(x)\sin nx$ ungerade, damit alle Koeff. $b_n = 0$ $\Rightarrow$ reine Kosinusreihe

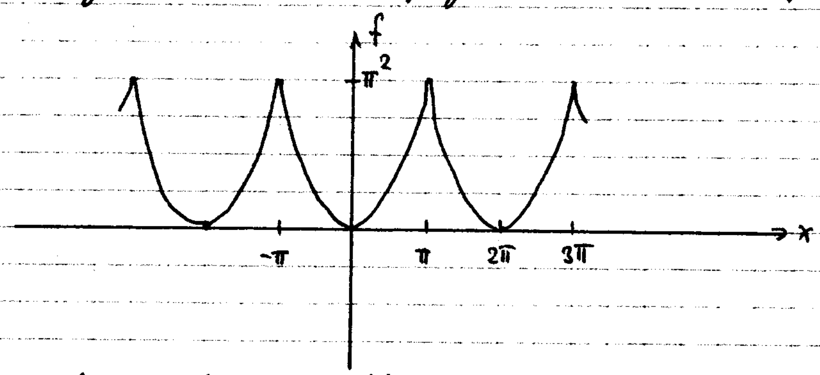
Wenn f ungerade, dann $f(x)\cos nx$ ungerade, alle $a_n = 0$, reine Sinusreihe

Gerade Fktn f ergeben reine Kosinusreihen als Fourierreihe, ungerade Fktn f ergeben reine Sinusreihen.

21.6.00

1^0 Gesucht: Fourierentwicklung von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$

x^2 ist nichtperiodisch. Setzen f periodisch auf $\mathbb{R}$ fort:



f ist gerade $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \underset{f \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \dots = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

f ist stetig und besitzt überall die rechts- u. linksseitige Ableitung, auch in den "Nahtstellen". $\Rightarrow$ Insbesondere auf $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad -\pi \le x \le \pi$$

Spezialfälle:

$X=0$:
$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}} \qquad 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots$$

$X=\pi$:
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (\cos n\pi = (-1)^n)$$

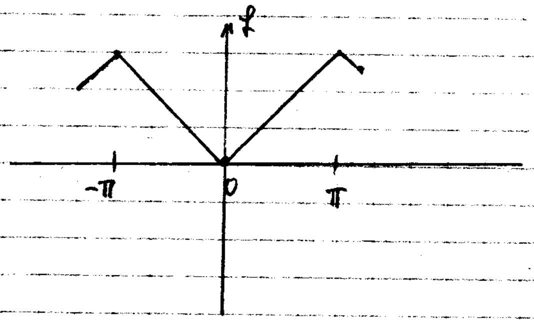
$$\frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Math. Sternstunde!

2° Entwicklung von $f(x)=x$ in eine Kosinusreihe auf $[0,\pi]$

$\Rightarrow$ Müssen $f(x)=x$ periodisch zu einer geraden Fkt auf $[-\pi,\pi]$ forts.



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{auf } [0,\pi] \\ -x & \text{auf } [-\pi,0] \end{cases}$$

"Sägezahnfkt"

Fourierkoeff.:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gerade Fkt.}}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi \qquad \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \dots = 2\,\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}$$

$$\Rightarrow a_{2k} = 0$$
$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \qquad 0 \le x \le \pi$$

Spezialfälle: