Vorlesung Analysis III

Fredi Tröltzsch, SS 2008

1. Maß- und Integrationstheorie

Literaturempfehlungen

- Skript Analysis III, Prof. H. Yserentant
- Bauer, H., Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. De Gruyter 1978
- Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw Hill 1964
- Forster, O., Analysis 3, 3. Auflage, Vieweg 1999.

Die Vorlesung folgt in ihrem Grundaufbau dem o.g. Skript.

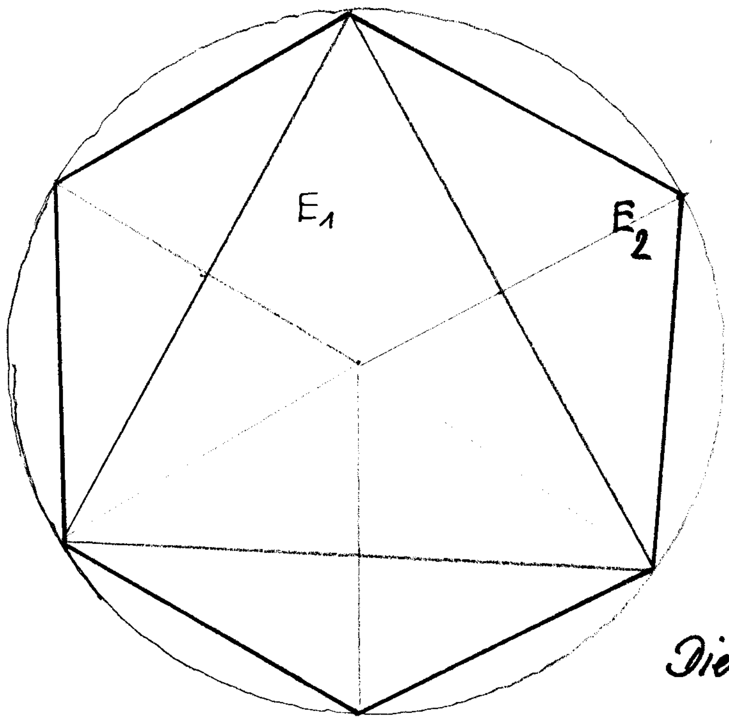
1.1. Vorbemerkungen zum Maßproblem

In der Elementargeometrie ordnen wir geometrisch einfachen Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ Maßzahlen wie Länge, Fläche oder Volumen zu. Aus solchen "einfachen" Mengen zusammengesetzten Mengen kann man dann ebenfalls unter gewissen Voraussetzungen eine Maßzahl zuordnen. Aber erstens ist die einseitige Fixierung auf elementargeometrische Figuren zu eng:

- In der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht die Notwendigkeit der Einführung ganz anderer Maße. Beim Würfeln ist die Menge der Zahlen $1,\dots,6$, $\Omega = \{1,\dots,6\}$, zu betrachten und man führt für alle möglichen Teilmengen $E \subset \Omega$ ein: $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(E) = \frac{1}{6}\underbrace{|E|}_{\text{Kardinalzahl}}$.
- Welchen "Inhalt" sollte man der Menge aller rationalen Zahlen aus $[0,1]$ zuordnen? Eins, weil diese Menge dicht liegt, oder weniger?

Zweitens bringt schon die Betrachtung einer so einfachen Menge wie der Kreisscheibe unerwartete Probleme. Hier stößt die Elementargeometrie an ihre Grenzen.

Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Kreisscheibe. Ihren Inhalt kann man so bestimmen: Wir schöpfen K durch eine Folge $\{E_n\}$ offener, regelmäßiger $3 \cdot 2^{n-1}$-Ecke aus, $n = 1, 2, \dots$



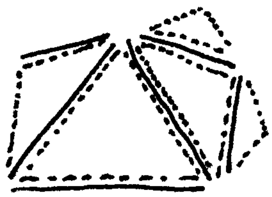
- E_{n+1} entsteht aus E_n durch Winkelhalbierung,
- E_1 ist ein offenes gleichseitiges Dreieck

Man könnte den Inhalt des Kreises als Grenzwert der Folge der Flächeninhalte $|E_n|$ definieren,

$$|K| = \lim_{n \to \infty} |E_n| .$$

Dieser existiert. Warum?

Andererseits entsteht E_{n+1} auch durch Aufsetzen von $3 \cdot 2^{n-1}$ kleineren Dreiecken auf die Kanten von E_n. So erscheint K als Dreiecksmosaik, zusammengesetzt aus Vereinigung abzählbar vieler offener Dreiecke und Strecken (gemeinsame Seiten von Dreiecken).
All diese Mengen sind durchschnittsfremd.



Sind $A_1, A_2, \dots$ diese durchschnittsfremden Mengen, so können wir definieren:

Ist α_n die Maßzahl von A_n, so ist

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

die Maßzahl von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Nachteil der Methode:

- Sie benutzt sehr stark die geometrischen Gegebenheiten der Kreisscheibe
- Schon bei der Abschließung von K kommen wir so nicht durch (die Kreislinie wird nicht vollständig überdeckt). 28.

Die Maßtheorie wird uns den Schlüssel für alle angesprochenen Fragen liefern.

1.2. Ringe und σ-Algebren, Prämaße

Im Weiteren ist Ω eine Grundmenge, in der alle betrachteten Teilmengen liegen (Ω ist eine beliebige Menge!)

Def 1.1. Eine Menge $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt Ring über Ω, wenn mit je zwei Mengen A, B aus $\mathcal{R}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{R}$ liegen. — Auch Mengenring

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R} \wedge A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Offenbar gehört dann auch $A \cap B$ zu $\mathcal{R}$. — Ü.A.

Def 1.2. Ist $\mathcal{R}$ ein Ring (über Ω) und gilt zusätzlich
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ falls $A_i \in \mathcal{R}$ für alle $i = 1, 2, \dots$,
dann heißt $\mathcal{R}$ σ-Ring (über Ω).

Besonders wichtig im Hinblick auf die Konstruktion des Lebesgue-Maßes für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ (darauf basiert ein wesentlicher Teil der Integrationstheorie) ist das Maß von Elementarmengen.

Wir bezeichnen als Quader jede Menge $Q \subset \mathbb{R}^d$ der Form — genauer: achsenparalleler Quader

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid a_i \text{ "}\leq\text{" } x_i \text{ "}\leq\text{" } b_i,\ i = 1, \dots, d \},$$

wobei $a_i \leq b_i$ aus $\mathbb{R}$ gegeben sind und für "$\leq$" jedes der Zeichen $<$, $\leq$ eingesetzt werden kann.

Bemerkung: $Q = \emptyset$ ist damit möglich.

Def 1.3. Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ die Vereinigung endlich vieler Quader, dann heißt A elementargeometrische Figur oder kurz Elementarmenge.
Wir bezeichnen im Weiteren die Menge der Elementarmengen aus $\mathbb{R}^d$ mit $\mathfrak{F}^d$. "$\mathfrak{F}$" wie Figuren

Elementarmengen sind stets Vereinigung endlich vieler disjunkter Quader. $\mathfrak{F}^d$ ist ein Ring. ü

Satz 1.4. Sind A_i, $i = 1, 2, \dots$, Mengen eines σ-Rings $\mathcal{R}$, dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}.$$

Beweis:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \right) = A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{i=2}^{\infty} A_i \right)$$

$$= A_1 \setminus \underbrace{\bigcup_{i=2}^{\infty} \underbrace{(A_1 \setminus A_i)}_{\in \mathcal{R}}}_{\in \mathcal{R}} \qquad \square$$

Def 1.5 Ein Ring bzw. σ-Ring, der auch die Grundmenge Ω enthält, heißt Algebra bzw. σ-Algebra.

Beispiele 1.6.

1° Jede σ-Algebra ist eine Algebra

2° Ist Ω eine beliebige Menge, so ist die Menge aller endlichen Teilmengen ein Ring, aber nur für endliches Ω eine Algebra.

3° Der kleinste in einer Menge Ω existierende Ring ist $\{\emptyset\}$.

Satz 1.7 Für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\mathcal{P}(\Omega)$ existiert ein kleinster Ring $\mathcal{R}(\mathfrak{M})$, der $\mathfrak{M}$ enthält.
Dieser heißt von $\mathfrak{M}$ erzeugter Ring. Gleiches gilt für σ-Ringe und σ-Algebren.

Beweis: Übungen.

Dieser recht einfach zu zeigende Satz hat weitreichende Konsequenzen.
Betrachten wir die Menge aller Quader des $\mathbb{R}^d$. Wir brauchen alle Mengen, die aus diesen Quadern durch abzählbar viele Operationen $\cup$, $\cap$ oder $\setminus$ hervorgehen. Das sind die <u>Borelschen Mengen</u>.

<u>Def 1.8:</u> Jede durch abzählbar viele Vereinigungen, Durchschnitts- oder Komplementbildungen aus Quadern des $\mathbb{R}^d$ darstellbare Menge heißt <u>Borelsche Menge</u>.
Daher ist das System der Borelschen Mengen die kleinste von den (achsenparallelen) Quadern erzeugte σ-Algebra.

Jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist eine Borelsche Menge. Geht man an Stelle von Quadern von offenen oder abgeschlossenen oder kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ aus, so erzeugt man ebenfalls die σ-Algebra der Borelschen Mengen. (Bauer, S. 38) Übungen

Im Weiteren ist $\mathcal{R}$ wieder ein beliebiger Ring. Die σ-Algebra der Borelschen Mengen ist ein wichtiger Spezialfall, der am Ende zum Lebesgue-Maß führt, aber unsere Theorie ist viel allgemeiner.

<u>Def 1.9:</u> Eine auf einem Ring $\mathcal{R}$ definierte Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ heißt <u>additiv</u> oder <u>Inhalt</u> auf $\mathcal{R}$, wenn gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{R} \text{ mit } A \cap B = \emptyset$$

<u>Bemerkungen</u>

(i) Man beachte, dass $\mu(A) = \infty$ möglich ist.

(ii) Da μ auf Mengen definiert ist, nennen wir μ im Weiteren <u>Mengenfunktion</u>, wenn $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und μ additiv ist.

von S. 9 ⊛

<u>Bsp. 1.10:</u> Wir konstruieren einen Inhalt $\lambda : \mathcal{F}^d \to [0,\infty[$ auf dem Ring der elementargeometrischen Mengen wie folgt:

Für Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_d$ mit $I_i = \{x \mid a_i \text{"}\leq\text{"} x \text{"}\leq\text{"} b_i\}$ ("$\leq$" $\in \{<, \leq\}$) setzen wir

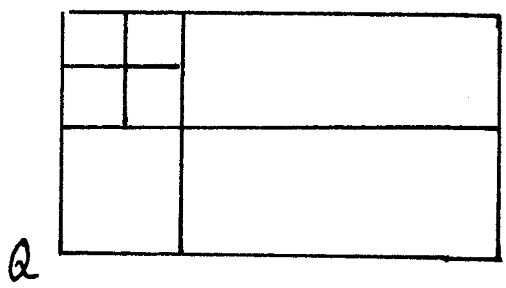
$$\lambda(Q) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

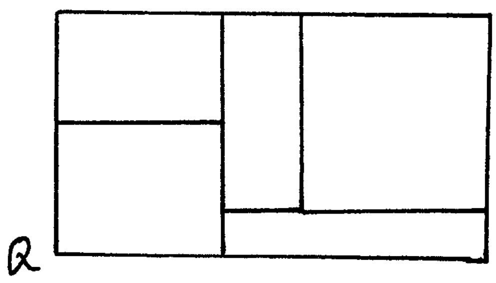
und für $A \in \mathcal{F}^d$ mit $A = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, wobei $Q_1, \ldots, Q_n$ durchschnittsfremde Quader sind, setzen wir

$$\lambda(A) := \lambda(Q_1) + \ldots + \lambda(Q_n).$$

Dieses λ ist ein Inhalt, der elementargeometr. Inhalt.

Wirklich? Ist λ unabhängig von der Zerlegung von A in Quader? Ein Quader selbst kann zerlegt werden. Kann das zu Widersprüchen führen? Antwort: Übungen — Bauer, S. 26-28





Nun wollen wir uns von der Einschränkung auf endlich viele zu vereinigende Teilmengen befreien.

<u>Def. 1.11</u> Ein auf einem Ring $\mathcal{R}$ definierter Inhalt μ heißt σ-additiv oder Prämaß, wenn gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

für alle Folgen paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{R}$, deren Vereinigung in $\mathcal{R}$ liegt.

Es zeigt sich, dass unser in Bsp. 1.10. konstruiertes λ ein Prämaß ist:

<u>Satz 1.12</u> Der elementargeometrische Inhalt λ ist ein Prämaß.

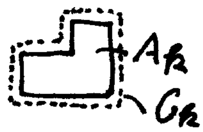
<u>Beweis</u> Es seien $A_k \in \mathcal{R}$, $k=1,2,\dots$, durchschnittsfremd und
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}. \qquad (\Rightarrow A \text{ ist selbst Elementarmenge! })$$

a) $\underline{\sum_1^{\infty} \lambda(A_k) \le \lambda(A):}$

Wir wissen bereits, dass λ additiv ist. Deshalb
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) \underset{A_i \cap A_j = \emptyset}{=} \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \le \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \lambda\Big(\underbrace{A \setminus \bigcup_1^{n} A_k}_{\in \mathcal{R}}\Big)$$
$$= \lambda(A).$$

b) $\underline{\lambda(A) \le \sum_1^{\infty} \lambda(A_k):}$

Geben $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Jedes A_k kann durch eine <u>offene</u> Elementarmenge $G_k \in \mathcal{F}^d$ mit $A_k \subset G_k$ so approximiert werden, dass
$$\lambda(G_k) \le \lambda(A_k) + \varepsilon 2^{-k},$$



weil dies für Quader auch geht.

Ferner finden wir eine <u>abgeschlossene</u> Teilmenge $F \subset A$ mit
$$\lambda(A) \le \lambda(F) + \varepsilon .$$
Das liegt daran, dass A selbst eine Elementarmenge ist und wir dies mit den endlich vielen A erzeugenden Quadern tun können. Außerdem ist A beschränkt, somit auch F $\Rightarrow$ F ist kompakt. Wir haben
$$A_k \subset G_k \quad \forall k$$
$$\Rightarrow \quad F \subset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k .$$
Kompaktheit: F wird durch endl. viele der G_k überdeckt, o.B.d.A. (ggf. Umnummerierung)
$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k .$$

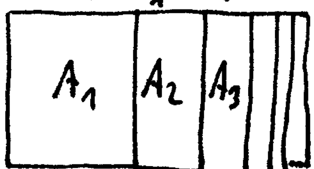
Damit

$$\lambda(A) \le \lambda(F)+\varepsilon \le \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\Big)+\varepsilon$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \lambda(G_k)+\varepsilon \le \sum_{k=1}^{n} \big(\lambda(A_k)+\varepsilon 2^{-k}\big)+\varepsilon$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) + 2\varepsilon$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + 2\varepsilon.$$

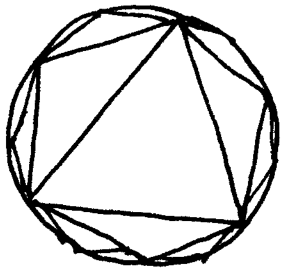
Wegen Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung. $\square$

Was bringt uns dieses Resultat für Inhalte wie λ? Falls eine Menge des Rings (bei λ: eine Elementarmenge) als Vereinigung abzählbar vieler Mengen des Rings dargestellt werden kann, dann gilt dafür σ-Additivität.
Was fehlt? Die gleiche Eigenschaft für abzählbare Vereinigungen von Mengen, die nicht mehr dem Ring angehören

$A = \bigcup A_k$



Das geht schon



Das noch nicht

Def. 1.13 Ein Prämaß auf einem σ-Ring heißt *Maß* und die Mengen des σ-Rings heißen *messbar*. Ist der σ-Ring sogar eine Algebra $\mathcal{A}$ über der Grundmenge Ω, so nennt man das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen *Maßraum*. Dieser heißt σ-endlich, falls Mengen $\Omega_n \in \mathcal{A}$ existieren mit

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad \text{und} \quad \mu(\Omega_n) < \infty \ \forall n.$$

Bemerkung: $\Omega = \bigcup_{n=1}^{m} \Omega_n$ ordnet sich ein mit $\Omega_n = \emptyset$, $n > m$.