2.6. Ein Rückblick auf Fourierreihen

Am Ende des Kurses Analysis II haben wir uns mit Fourierentwicklungen der Form

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

für eine Funktion f auf einem Intervall der Länge 2π befasst und deren punktweise Konvergenz diskutiert. Diese Analysis war hinreichend kompliziert. Das Grundprinzip der Fourierentwicklung kann jedoch recht einfach im Hilbertraum erklärt werden, wobei allerdings das Konvergenzresultat weit weniger scharf ist. Wir diskutieren diesen allgemeinen Zugang in diesem Abschnitt.

Dazu sei im Weiteren H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$. Wir rufen noch einmal die Definition eines solchen Raumes zurück:

<u>Def 2.16</u> Ein Hilbertraum H über $\mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$) ist ein Banachraum über $\mathbb{R}$ (bzw $\mathbb{C}$), der mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen ist, das durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

mit der Norm $\|\cdot\|$ verträglich ist. Dabei genügt das Skalarprodukt den unten aufgeführten Eigenschaften.

<u>Bezeichnung des Raumes:</u> $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Eigenschaften des Skalarprodukts:

(i) $\langle v,v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in H, \quad \langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$

(ii) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \quad \forall u,v,w \in H$

(iii) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle} \quad \forall u,v \in H$

(iv) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda \langle u,v\rangle$ — " — $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

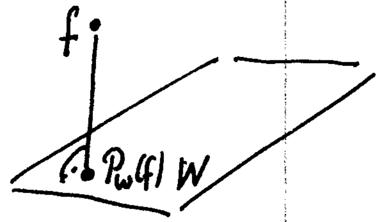
Folgerung: $\langle u,\lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$.

Zwei Elemente $u,v\in H$ mit $\langle u,v\rangle=0$ heißen zueinander <u>orthogonal</u>.

<u>Def. 2.17</u> Es sei H ein Hilbertraum und J eine Indexmenge. Die Menge $\mathcal{O}=\{e_j : j\in J\}$ von Elementen $e_j\in H$ heißt <u>Orthonormalsystem</u>, wenn gilt

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j\in J.$$

<u>Lemma 2.18</u> Es sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H und $W=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}$. Wir definieren für jedes $f\in H$



$$P_W(f) := \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j\rangle e_j.$$

Dann gilt $f-P_W(f)\perp W$,

$$\|f-P_W(f)\| = \min_{w\in W} \|f-w\|$$

und $P_W(f)$ ist das einzige Element aus W, das dieses Minimum liefert.

<u>Beweis</u>: Ist identisch mit dem aus der linearen Algebra bekannten, er wird nochmals angegeben. Dabei folgen wir dem Skript Analysis III von D. Ferus, das einen sehr kurzen Beweis angibt.

- $f-P_W(f)\perp W$:

$$\Big\langle f-\sum_1^n \langle f,e_j\rangle e_j,\ e_k\Big\rangle = \langle f,e_k\rangle - \langle f,e_k\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Gleiches gilt mit jedem $w\in W$ an Stelle von e_k.

- Sei $w\in W$ beliebig. Dann

$$f-w = \underbrace{f-P_W(f)}_{\perp W} + \underbrace{P_W(f)-w}_{\in W}$$

$\Rightarrow$ (links und rechts "quadrieren")

$$\|f-w\|^2 = \underbrace{\|f-P_W(f)\|^2}_{\text{fest}} + \underbrace{\|P_W(f)-w\|^2}_{=0 \iff w=P_W(f)}.$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung. $\square$

Ist H unendlichdimensional, dann kann man Orthonormalsysteme mit unendlich vielen Elementen e_j konstruieren. Es stellt sich hier die Frage, was in Lemma 2.18 für $n \to \infty$ passiert.

<u>Def 2.19</u> Es sei $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H. Zu $f \in H$ heißt

$$\mathcal{F}(f) := \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j \qquad \langle f, e_j \rangle: \text{ Fourierkoeff.}$$

<u>Fourierreihe von f</u> bezüglich $(e_j)_j$.

Wir sehen gleich, dass $\mathcal{F}(f)$ wirklich stets definiert ist.

<u>Satz 2.20</u> (<u>Besselsche Ungleichung</u> und <u>Parsevalsche Gleichung</u>)
Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dann gilt für alle $f \in H$:

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ <u>Besselsche Ungl.</u>

(ii) Die Fourierreihe $\mathcal{F}(f)$ konvergiert in H.

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2$ <u>Parsevalsche Gl.</u>

gilt genau dann, wenn $\mathcal{F}(f) = f$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j = f \text{ in } H.$$

<u>Beweis:</u> Wir setzen für die n-te Partialsumme von $\mathcal{F}(f)$

$$\mathcal{F}_n(f) := \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

(i) Lemma 2.18 $\Rightarrow$

$$\|f - \mathcal{F}_n\|^2 = \langle f, f - \mathcal{F}_n \rangle - \underbrace{\langle \mathcal{F}_n, f - \mathcal{F}_n \rangle}_{=0} = \|f\|^2 - \langle f, \mathcal{F}_n \rangle$$

denn $\mathcal{F}_n$ ist die Orthogonalprojektion <u>auf</u> span $\{e_1, \dots, e_n\}$.
aus $\langle f, \mathcal{F}_n \rangle = \displaystyle\sum_{1}^{n} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2 + \|f - \mathcal{F}_n\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2. \quad (*)$$

(i) folgt für $n \to \infty$.

(ii) Aus (i) folgt die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j\rangle|^2$.
Damit gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=n}^{m} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq \varepsilon \quad \forall n,m \geq k(\varepsilon),\ m \geq n,$$

denn die Partialsummen der obigen Reihe bilden natürlich eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad \left\| \sum_{j=n}^{m} \langle f, e_j\rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=n}^{m} |\langle f, e_j\rangle|^2 \leq \varepsilon \quad \forall n,m \geq k.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen

$$\mathcal{F}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j\rangle e_j$$

eine Cauchyfolge in H, die wegen Vollständigkeit in H konvergiert.

(iii) $(*) \Rightarrow \|f\|^2 = \|\mathcal{F}_n(f)\|^2 + \underbrace{\|f - \mathcal{F}_n(f)\|^2}_{\to 0 \text{ wenn } \mathcal{F}_n \to f}$.

Daraus folgt die Aussage.

$\square$

Es stellt sich nun die Frage, unter welcher Voraussetzung wir die Konvergenz $\mathcal{F}_n(f) \to f$, $n \to \infty$, erwarten können.

<u>Def 2.21</u> Es sei $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dieses System heißt vollständig, wenn

$$H = \mathrm{cl}\ \mathrm{span}\ \{ e_j : j \in \{1, 2, \dots\} \}.$$

Das bedeutet, dass jedes $v \in H$ Grenzwert einer Folge aus $\mathrm{span}\{e_j\}$ ist bzw.:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \text{ (bzw. } \mathbb{R}) \text{ mit}$$

$$\left\| v - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\| < \varepsilon. \qquad (+)$$

Satz 2.22 Ist $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so konvergiert für jedes $f \in H$ die zugeordnete Fourierreihe gegen f, d.h.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j = f \qquad \forall f \in H.$$

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $(+)$ ein w aus $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ für gewisses n, so dass

$$\| f - w \| < \varepsilon .$$

Aus der Minimumeigenschaft (ii) von Lemma 2.18 folgt

$$\| f - \mathcal{F}_n(f) \| \le \| f - w \| < \varepsilon .$$

Wähle $\varepsilon = 1/n$, dann folgt $\mathcal{F}_n(f) \to f$ für $n \to \infty$ $\square$

Anwendung auf Fourierentwicklungen von reellen Funktionen einer Veränderlichen.

Wir haben bereits L_p-Räume $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eingeführt, bei denen die entsprechenden Integrale immer als solche über Ω zu definieren waren.
Oft ist der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aber fest, z.B. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \sigma$-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und $\mu = \lambda^1$. Es interessiert aber nur eine Teilmenge von Ω, z.B. $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
Wir betrachten in solchen Fällen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die wir durch Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen können, wenn nötig. Messbarkeit von f (betrachtet als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$) ist dann offenbar äquivalent dazu, dass die Mengen

$$\{ x \in [a,b] : f(x) > c \}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ messbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. In diesem Sinne können wir also von messbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sprechen.

<u>Def 2.23</u> ($L_2(a,b)$) Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Unter $L_2(a,b)$ verstehen wir den Raum aller (Äquivalenzklassen von) Lebesgue-meßbaren Funktionen $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ mit

$$\int_a^b f(x)^2 \, dx < \infty .$$

Versehen mit der Norm

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2}$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) v(x) \, dx$$

ist $L_2(a,b)$ ein Hilbertraum.

<u>Bemerkungen</u> Wir schreiben wieder dx an Stelle von $d\lambda^1(x)$. Die Definition ist äquivalent zu der von $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \lambda^1)$, wenn wir Funktionen betrachten, die außerhalb von $]a,b[$ verschwinden.

Im Weiteren betrachten wir den Raum $L_2(0,2\pi)$ und darin das Funktionensystem

$$\Big\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{e_1(x)},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x}_{e_2(x)},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x}_{e_3(x)},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x}_{e_4(x)},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots \Big\}$$

Wie wir im Kurs Analysis II gesehen haben, bilden diese Funktionen ein Orthonormalsystem, denn das Skalarprodukt gleicher Funktionen ist gleich eins, das verschiedener gleich null.

z.B. gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, \sin lx \, dx = \begin{cases} \pi & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin lx \right) dx = \delta_{kl} .$$

Aus der Theorie der Fourierreihen im Hilbertraum $H = L_2(0,2\pi)$ erhalten wir die folgenden Fourierkoeffizienten für eine gegebene Funktion $f \in L_2(0,2\pi)$ [wir sind also im Fall eines reellen Hilbertraums]

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &:= \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\,dx \\ \beta_k &:= \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\,dx \end{aligned}\right\} k=1,2,\dots$$

$$\alpha_0 := \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$\Rightarrow$ es ergibt sich die <u>Fourierreihe</u>

$$\mathcal{F}(f)(x) = \alpha_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx + \beta_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl\{\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx}_{a_k}\cos kx + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx}_{b_k}\sin kx\Bigr\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k=0,1,2,\dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k=1,2,\dots \end{aligned}}$$

"Teile das Integral durch die <u>halbe</u> Periodenlänge"

Das sind genau die Formeln aus dem Kurs Analysis II.
Man kann nun zeigen, dass das obige System der trigonometrischen Funktionen vollständig ist, was wir aber aus Zeitgründen nicht tun wollen. Damit ist Satz 2.22 anwendbar:

> Für jedes $f \in L_2(0,2\pi)$ konvergiert die Fourierreihe <u>im Sinne von $L_2(0,2\pi)$</u> gegen f, $\mathcal{F}(f) = f$.
> Das heißt $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_n(f) - f\| = 0$, bzw.
> $$\int_0^{2\pi}\left(\mathcal{F}_n(f)(x) - f(x)\right)^2 dx \to 0,\ n\to\infty,$$
> "<u>Konvergenz im quadratischen Mittel</u>"

Dieses Resultat ist damit schwächer als die Aussage über punktweise Konvergenz von Fourierreihen, die wir im Kurs Analysis II (mit mehr Aufwand) erhalten haben. Aber dafür war die Analysis im Hilbertraum sehr einfach.

Aus der Konvergenz im quadratischen Mittel folgt übrigens nur: Es existiert eine Teilfolge F_{n_k} mit

$$F_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{für fast alle } x \in [0, 2\pi].$$

Das ist wahrlich nicht sehr viel.

Erweiterungen

- Fourierreihen auf $[0,T]$: Setze $\omega := \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x \, dx \qquad k = 0,1,\dots \qquad \left(\frac{2}{T} = \frac{1}{T/2} \dots\right)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x \, dx \qquad k = 1,2,\dots$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right)}$$

- Komplexe Form von Fourierreihen auf $[0,T]$

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \quad c_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{ik\omega x} dx$$

Sehr schön dargestellt im Skript von D. Ferus, An. III.