3. Differentialformen

3.1. Alternierende Multilinearformen

Im Weiteren ist stets V ein n-dimensionaler linearer Raum über $\mathbb{R}$. Wir wiederholen aus dem Kurs Analysis II

Def. 3.1 Eine k-Linearform, kurz k-Form, ist eine Abbildung $\omega : V^k \to \mathbb{R}$, $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k)$, die in jeder einzelnen Variablen v_i bei festgehaltenen restlichen Variablen $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_k$ linear ist.

Dabei: $V^k = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}}$

Fall $k=1$: 1-Formen sind lineare Funktionale auf V, liegen in V^*.

$k=0$: Wir vereinbaren, dass 0-Formen reelle Zahlen sind.

Beispiele 3.2 Sei $V = \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n)^T \in V$.

(i) $\omega(h) = a^T h$ mit $a \in V$ ist eine 1-Form

(ii) Die Nullform $\omega = 0$, $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ mit $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ für alle $v = (v_1, \dots, v_k)$ ist eine k-Form.

(iii) Besonders wichtig, Fall $k = n$: Determinante

Wir nehmen $k (=n)$ Vektoren $v_1, \dots, v_k$ aus $V = \mathbb{R}^n$,

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

und bilden die Matrix, deren Spalten aus $v_1, \dots, \underset{\underset{n}{\shortparallel}}{v_k}$ bestehen:

$$\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & & v_{nn} \end{pmatrix} =: A(v_1, \dots, v_k).$$

Die Abbildung

$$\omega : (v_1, \dots, v_k) \mapsto \det A(v_1, \dots, v_k)$$

ist eine k-Form.

<u>Bezeichnung</u> Den <u>Raum aller k-Formen</u> über V bezeichnen wir mit $T^k(V)$.

<u>Def 3.3</u> Ist ω eine k-Form und η eine l-Form, so heißt die $(k+l)$-Form $\omega \otimes \eta$,

$$\omega \otimes \eta(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l}) := \omega(v_1,\dots,v_k)\,\eta(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

das <u>Tensorprodukt</u> von ω und η.

<u>Beispiel 3.4</u> Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $\omega = a^T v$, $\eta = b^T v$ seien zwei 1-Formen mit $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt

$$\omega \otimes \eta(v,w) = (a^T v)(b^T w) = \sum_{i,j} a_i b_j v_i w_j$$

<u>Rechenregeln für das Tensorprodukt</u>: Offenbar gilt

$$\boxed{\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)\otimes\eta &= \omega_1\otimes\eta + \omega_2\otimes\eta \\ \lambda(\omega\otimes\eta) &= (\lambda\omega)\otimes\eta = \omega\otimes(\lambda\eta) \quad \forall \lambda\in\mathbb{R} \\ (\omega_1\otimes\omega_2)\otimes\omega_3 &= \omega_1\otimes(\omega_2\otimes\omega_3) \end{aligned}}$$ HA

<u>Wdh</u>: Eine Bijektion $\pi : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ heißt <u>Permutation</u> der Indizes $1,\dots,k$.

Die Menge aller solcher Permutationen bildet durch Komposition (d.h. Hintereinanderausführung) eine Gruppe, die

<u>Permutationsgruppe</u> S_k.

<u>Transpositionen</u>, sind spezielle Permutationen, nämlich solche, die genau 2 Indizes miteinander vertauschen. z.B. ist

$$\{1,2,3\} \mapsto \{3,2,1\}$$

eine Transposition.

<u>Satz 3.5</u> Jede Permutation ist das Produkt endlich vieler Transpositionen. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, die Zahl der Transpositionen ist aber, abhängig von der Permutation, stets gerade oder ungerade.

Beweis ist bekannt aus dem Kurs Lineare Algebra. Er findet sich z.B. auch in v. Mangoldt / Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, I.

Wir setzen für eine Permutation π

$$\operatorname{sign}(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \pi \text{ Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Zum Beispiel</u> $\pi : \{1,2,3,4\} \mapsto \{1,3,4,2\}$

$\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$

$\operatorname{sign}(\pi) = 1$, denn

$$\pi : \{1,2,3,4\} \mapsto \{1,3,2,4\} \mapsto \{1,3,4,2\}$$

oder

$$\pi : \{1,2,3,4\} \mapsto \{1,2,4,3\} \mapsto \{1,3,4,2\}$$

<u>Rechenregel</u>

$$\operatorname{sign}(\pi \cdot \sigma) = \operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\sigma)$$

<u>Def 3.6</u> Eine <u>alternierende k-Form</u> ist eine k-Form $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$$

für alle $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ und alle $\pi \in S_k$.

Den Raum aller alternierenden k-Formen bezeichnen wir mit

$$\Lambda^k(V).$$

<u>Alternative Charakterisierung:</u>

- ω ist alternierend genau dann, wenn bei der Vertauschung von v_i und v_j, also bei einer Transposition π, das Vorzeichen wechselt.
- bzw genau dann, wenn $\omega(v_1, \dots, v_k)$ verschwindet, wenn zwei Variablen v_i, v_j gleich sind. H.A.

Satz 3.7. Durch

$$(\mathcal{A}\omega)(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})$$

wird ein linearer Operator von $T^k(V)$ in $\Lambda^k(V)$ definiert, die Alternierung von ω. Ist ω selbst alternierend, dann gilt

$$\mathcal{A}\omega = \omega.$$

Beweis:

- Die Linearität von $\mathcal{A}$ ist offensichtlich
- $\mathcal{A}\omega$ ist stets alternierend, auch wenn es ω nicht ist. Dazu reicht der Nachweis aus, dass $\mathcal{A}\omega$ beim Tauschen zweier Variablen das Vorzeichen wechselt.

  Der Tausch von v_i und v_j führt dazu, dass in allen Summanden von

$$\sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(1)})$$

  eine weitere Transposition vorgenommen wird, so dass an Stelle von π eine Permutation $\tilde{\pi}$ mit $\operatorname{sign}(\tilde{\pi}) = -\operatorname{sign}\pi$ auftritt. Nach wie vor werden alle $\pi\in S_k$ durchlaufen, auch alle ω-Werte, aber nun mit anderem Vorzeichen, so dass aus obiger Summe wird:

$$-\sum_{\tilde{\pi}\in S_k} \operatorname{sign}(\tilde{\pi})\,\omega(v_{\tilde{\pi}(1)},\dots,v_{\tilde{\pi}(1)}).$$

- Ist ω alternierend, dann gilt offenbar

$$\operatorname{sign}(\pi)\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = \omega(v_1,\dots,v_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\,\omega(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = \sum_{\pi\in S_k} \omega(v_1,\dots,v_k)$$

$$= k!\,\omega(v_1,\dots,v_k),$$

denn es gibt $k!$ verschiedene Permutationen von $\{1,\dots,k\}$.

$$\Rightarrow \mathcal{A}\omega = \frac{1}{k!}\,k!\,\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega$$

$\square$

<u>Def 3.8 (Äußeres Produkt)</u> Das <u>äußere Produkt</u> von $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\eta \in \Lambda^l(V)$ ist die alternierende $(k+l)$-Form

$$\boxed{\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \mathcal{A}(\omega \otimes \eta)}$$

"Dachprodukt"

<u>Bsp</u>: Seien ω und η aus $\Lambda^1(V)$. Dann

V5(2)

$$\omega \wedge \eta \;(v_1, v_2) = \frac{(1+1)!}{1!\,1!} \mathcal{A}(\omega \otimes \eta)(v_1, v_2)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2!} \left[\omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1) \right]$$

$$\Rightarrow \omega \wedge \eta \;(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1)$$

#

Man erhält die folgenden Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta &= \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta \\ \lambda \cdot (\omega \wedge \eta) &= (\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \eta) \\ \omega \wedge \eta &= (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \end{aligned}}$$

Die Beweise sind relativ elementar. Schwieriger ist der Beweis der <u>Assoziativität der Operation $\wedge$</u>. Zur Vorbereitung:

<u>Lemma 3.9</u> Es seien $\omega \in T^k(V)$, $\eta \in T^l(V)$ sowie $\mathcal{A}\omega = 0$ oder $\mathcal{A}\eta = 0$. Dann gilt $\mathcal{A}(\omega \otimes \eta) = 0$.

<u>Beweis</u>: Kurz, aber trickreich! $\boxed{\text{Sei } \mathcal{A}\omega = 0}$.

G sei die Untergruppe aller Permutationen σ aus S_{k+l}, die die Indizes $k+1, \dots, k+l$ unverändert lassen, d.h.

$$(\sigma(1), \dots, \sigma(k+l)) = (\sigma(1), \dots, \sigma(k), k+1, \dots, k+l)$$

Äquivalenzrelation in S_{k+l}:

$$\pi' \sim \pi \iff \pi^{-1} \circ \pi' \in G.$$

Anders ausgedrückt

$$\pi^{-1} \circ \pi' = \sigma \in G \iff \boxed{\pi' = \pi \circ \sigma}$$

Damit $\pi' \in [\pi] \Leftrightarrow \pi' = \pi \circ \sigma$ mit $\sigma \in G$.
R sei ein entsprechendes System von Repräsentanten π.

$\Rightarrow (k+l)!\, \mathcal{A}(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l})$

$$= \sum_{\pi' \in S_{k+l}} \operatorname{sign}(\pi') \cdot \omega(v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(k)}) \cdot \eta(v_{\pi'(k+1)}, \dots, v_{\pi'(k+l)})$$

und wegen $\pi' = \pi \circ \sigma$,

$$= \sum_{\pi, \sigma} \underbrace{\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma)}_{\operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\sigma)} \cdot \omega(v_{\pi(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi(\sigma(k))}) \cdot \eta(v_{\pi(\underbrace{\sigma(k+1)}_{k+1})}, \dots, v_{\pi(\underbrace{\sigma(k+l)}_{k+l})})$$

hängt nicht von σ ab!

$$= \sum_{\pi \in R} \operatorname{sign}(\pi) \left(\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(v_{\pi(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi(\sigma(k))}) \right) \cdot \eta(\dots)$$

Setzen nun noch $w_i := v_{\pi(i)} \Rightarrow$

$$= \sum \operatorname{sign}(\pi) \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sign}(\sigma)\, \omega(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(k)}) \right)}_{= k!\, (\mathcal{A}\omega)(w_1, \dots, w_k) = 0} \cdot \eta(\dots)$$

$= 0$. Analog für $\mathcal{A}\eta = 0$. □

Nun beweist man die Assoziativität relativ leicht:

<u>Satz 3.10</u> Für alle $\omega_i \in \Lambda^{k_i}(V)$, $i = 1, 2, 3$, gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$
$$= \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1!\, k_2!\, k_3!} \mathcal{A}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \omega_3)$$

Allgemeiner gilt

$$\boxed{\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_j = \frac{(k_1 + \dots + k_j)!}{k_1! \cdots k_j!} \mathcal{A}(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_j).}$$

<u>Beweis</u> Für <u>alternierende</u> Multilinearformen ω gilt $\mathcal{A}\omega = \omega$, damit $\mathcal{A}(\mathcal{A}\omega - \omega) = \mathcal{A}\,0 = 0$.

Somit

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}\omega\otimes\eta)-\mathcal{A}(\omega\otimes\eta)=\mathcal{A}\big(\underbrace{\mathcal{A}\omega\otimes\eta-\omega\otimes\eta}_{\mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{A}\omega-\omega}_{=0})\otimes\eta}\big)\underset{\text{Lemma 3.9}}{=}0. \qquad (*)$$

$$\Rightarrow (\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}\underbrace{\mathcal{A}(\omega_1\otimes\omega_2)}_{\in\Lambda^{k_1+k_2}}\wedge\omega_3$$

$$=\frac{\cancel{(k_1+k_2)!}}{k_1!\,k_2!}\,\frac{((k_1+k_2)+k_3)!}{\cancel{(k_1+k_2)!}\,k_3!}\,\mathcal{A}(\mathcal{A}(\omega_1\otimes\omega_2)\otimes\omega_3)$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,\mathcal{A}\big(\underbrace{(\omega_1\otimes\omega_2)\otimes\omega_3}_{\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_3}\big)$$

Analog gelangt man bei $\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)$ zum gleichen Ausdruck. □

Nach all diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, eine Basis für den Raum $\Lambda^k(V)$ anzugeben. Dazu seien:

$\{e_1,\dots,e_n\}$ Basis von V

$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ dazu duale Basis von V^*,

d.h. es gilt $\boxed{\varphi_i(e_j)=\delta_{ij}\quad i,j=1,\dots,n.}$

<u>Satz 3.11</u> Unter Verwendung der eben definierten Basen gilt für alle $\omega\in\Lambda^k(V)$

$$\boxed{\omega=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}}$$

Die äußeren Produkte $\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$, $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ bilden eine Basis für $\Lambda^k(V)$.

Damit hat $\Lambda^k(V)$ die Dimension $\binom{n}{k}$.

Insbesondere ist der Raum der alternierenden n-Formen (bei $V=\mathbb{R}^n$) eindimensional und für $k>n$ hat $\Lambda^k(V)$ die Dimension Null.