Beweis (i) Jedes $\varphi \in V^*$ kann wie folgt dargestellt werden:

$$\boxed{\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i(v)}$$

Das sieht man so ein: Für $v = e_j$ stimmt das offenbar:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\underbrace{\varphi_i(e_j)}_{(=\delta_{ij})}$$

Hat v die Darstellung $\sum_j \lambda_j e_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$, so folgt nach Multiplikation mit λ_j und Summation über j

$$\varphi(\underbrace{\sum \lambda_j e_j}_{v}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i(\underbrace{\sum_j \lambda_j e_j}_{v}).$$ #

(ii) Daraus folgt eine Darstellung für ω:

$$\boxed{\omega(v_1,\dots,v_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\cdot\varphi_{i_1}(v_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(v_k)}$$

(wir brauchen $i_1, i_2, \dots, i_k$ als Namen, da uns bei $i,j,k,l\dots$ bald die Buchstaben ausgehen). Die Beziehung folgt aus (i), denn z.B. sei

$$\varphi(v) := \omega(v, \underbrace{v_2,\dots,v_k}_{\text{fest}}).$$

Dann wegen (i)

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i, v_2,\dots,v_k)\varphi_i(v)$$

mit $\underset{i=i_1}{v=v_1}$: $$= \sum_{i_1=1}^{n} \omega(e_{i_1}, v_2,\dots,v_k)\varphi_{i_1}(v_1).$$

Analog die restlichen $v_2,\dots,v_k\dots$

#

Da $\omega = 0$ ist, wenn zwei gleiche Vektoren e_{i_j}, e_{i_l} auftreten und außerdem Varianten unterschiedlichen Vorzeichens durch Variablentausch erzeugt werden, bekommen wir

$$\omega(v_1,\dots,v_k) = \sum_{i_1<\dots<i_k} \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\,\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\,\varphi_{i_{\pi(1)}}(v_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_{\pi(k)}}(v_k)$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sign}(\pi)\,\varphi_{i_{\pi(1)}}(v_{\underbrace{\pi^{-1}(\pi(1))}})\cdots\varphi_{i_{\pi(k)}}(v_{\pi^{-1}(\pi(k))})$$

das ist nichts anderes als 1...

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) \sum_{\pi\in S_k} \mathrm{sign}(\pi)\, \varphi_{i_1}(v_{\pi^{-1}(1)})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(v_{\pi^{-1}(k)})$$

(Variablensubstitution $\pi(j):=j$)

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) \sum_{\pi\in S_k} \mathrm{sign}(\pi^{-1})\, \varphi_{i_1}(v_{\pi^{-1}(1)})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(v_{\pi^{-1}(k)})$$

(wegen $\mathrm{sign}(\pi^{-1}) = \mathrm{sign}(\pi)$)

$$= \sum_{\dots} \dots \sum_{\pi\in S_k} \mathrm{sign}(\pi)\, \varphi_{i_1}(v_{\pi(1)})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(v_{\pi(k)})$$

(wegen $S_k = \{\pi^{-1} \mid \pi\in S_k\}$)

$$= \sum_{\dots} \dots \underbrace{\sum_{\pi\in S_k} \mathrm{sign}(\pi)\, (\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k})(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})}_{= k!\,\mathcal{A}(\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k})(\dots)}$$

Alle φ_{i_j} sind aus V^*, also 1-Formen. Anwendung von Satz 3.10. mit $k_1 = k_2 = \ldots = k_j = 1$ ergibt

$$k!\,\mathcal{A}(\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}) = \varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k},$$

also

$$\omega(v_1,\dots,v_k) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \omega(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\, \varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}.$$

(iii) Lineare Unabhängigkeit der äußeren Produkte $\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}$

Man zeigt mit analoger Rechnung

$$(\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k})(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \sum_{\pi\in S_k} \mathrm{sign}(\pi)\, \varphi_{i_1}(e_{j_{\pi(1)}})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(e_{j_{\pi(k)}})$$

(Rechnung für $\omega := \varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}$, $v_1 = e_{j_1},\dots,v_k = e_{j_k}$ unter Ausnutzung von $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$)

Damit lässt sich die lineare Unabhängigkeit dieser $\binom{n}{k}$ versch. Formen relativ leicht zeigen. Angenommen,

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{(i_1,\dots,i_k)}\, \varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k} = 0 \qquad (*)$$

mit $\binom{n}{k}$ reellen $\lambda_{(\dots)}$. Zu zeigen ist, dass daraus $\lambda_{(\dots)} = 0$ folgt.

Wir wenden (*) genau auf $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ an. Dann folgt

$$\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \lambda_{(i_1,\dots,i_k)} \varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}\Big)(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$$

$$= \sum_{\dots} \lambda_{(i_1,\dots,i_k)} \underbrace{\sum_{\pi\in S_k} \varphi_{i_1}(e_{j_{\pi(1)}})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(e_{j_{\pi(k)}})}$$

Faktoren sind genau dann alle nicht Null $(=1)$, wenn
$i_1 = j_{\pi(1)}, \dots, i_k = j_{\pi(k)}$
$= j_1, \qquad = j_k$
Daher muss der Vektor $(i_1,\dots,i_k)$ mit $(j_1,\dots,j_k)$ identisch sein; alles andere fällt weg.

$$= \lambda_{(i_1,\dots,i_k)} \underbrace{\varphi_{i_1}(e_{i_1})}_{=1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\varphi_{i_k}(e_{i_k})}_{=1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{(i_1,\dots,i_k)} = 0.$$

Die Zahl der verschiedenen $\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$ ist $\binom{n}{k}$ (Kombinationen von k Elementen aus n ohne Berücksicht. der Anordnung) $\square$

<u>Beispiele</u> 1) $\omega, \eta \in \Lambda^1(V)$ seien definiert durch

$\omega(v) = a^T v$ bzw. $\omega(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(v)$ — Siehe (i) $(\varphi_i \in V^*)$

$\omega(v) = b^T v$ " $\eta(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(v)$

$\Rightarrow$

$$\omega\wedge\eta = \sum_{1\le i<j\le n} (\omega\wedge\eta)(e_i,e_j)\, \varphi_i\wedge\varphi_j$$

$$= \sum_{i<j} [\underbrace{\omega(e_i)\eta(e_j)}_{a_i b_j} - \underbrace{\omega(e_j)\eta(e_i)}_{a_j b_i}]\, \varphi_i\wedge\varphi_j$$

$$= \sum_{i<j} [a_i b_j - a_j b_i]\, \varphi_i\wedge\varphi_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega \wedge \eta\, (v_1, v_2) = \sum_{i,j} [a_i b_j - a_j b_i]\, \varphi_i \wedge \varphi_j}$$

2) Zum Zeichen $\sum_{i<j} \dots$:

Zum Verständnis des Beweisgangs beleuchten wir den Fall $n = 3$, $k = 2$. Aus (ii) folgt

$$\omega(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{3} \omega(e_i, e_j)\, \varphi_i(v_1)\, \varphi_j(v_2).$$

Nach Ausmultiplizieren und Umordnen bleiben übrig

$$\begin{aligned}
= \;& \left.\begin{aligned} &\omega(e_1,e_2)\, \varphi_1(v_1)\, \varphi_2(v_2) \\ -&\omega(e_1,e_2)\, \varphi_1(v_2)\, \varphi_2(v_1) \end{aligned}\right\} \text{Permutationen mit } 1<2 \\
& \left.\begin{aligned} -&\omega(e_1,e_3)\, \varphi_1(v_2)\, \varphi_3(v_1) \\ +&\omega(e_1,e_3)\, \varphi_1(v_1)\, \varphi_3(v_2) \end{aligned}\right\} \text{mit } 1<3 \\
& \left.\begin{aligned} +&\omega(e_2,e_3)\, \varphi_2(v_1)\, \varphi_3(v_2) \\ -&\omega(e_2,e_3)\, \varphi_3(v_1)\, \varphi_2(v_2) \end{aligned}\right\} \text{mit } 2<3 \\
= \;& \sum_{1 \le i < j \le 3} \omega(e_i, e_j)\, \varphi_i \wedge \varphi_j\, (v_1, v_2)
\end{aligned}$$

3.2. Differentialformen

Die nächste Definition mutet zunächst etwas eigenartig an.

Def 3.12 Eine Abbildung $\omega : G \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \omega(x)$, einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ in $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ heißt Differentialform vom Grad k über G.

ω ordnet also jedem $x \in G$ eine alternierende k-Form zu, die k-Form $\omega(x)$.
Da wir für $k=0$ vereinbart haben $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, ist eine Differentialform ω von 0-ter Ordnung eine Abbildung von G in $\mathbb{R}$, die wir sinnvollerweise mit $f : G \to \mathbb{R}$ bezeichnen.

Def 3.13 Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f interpretiert als 0-Form. Dann ist für jedes $x \in G$ die Ableitung $f'(x)$ ein lineares Funktional auf $V = \mathbb{R}^n$, damit eine 1-Form also ein Element aus $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung

$$\omega : x \mapsto f'(x) \quad , \quad \omega : G \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$$

bezeichnen wir mit df. Es gilt also

$$\boxed{df(x)\,[v] = f'(x)\,v} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ x \in G.$$

Momentan ist df also nur eine etwas vornehmere Schreibweise für f'.
Wir betrachten nun spezielle Funktionen $f(x) = x_i$, die x die i-te Koordinate zuordnen,

$$\mathfrak{X}_i(x) := x_i .$$

Dann gilt

$$\mathfrak{X}_i'(x)\,v = e_i \cdot v = v_i, \text{ also nach Def.}$$

$$d\mathfrak{X}_i(x)\,[v] = v_i$$

$$\Rightarrow \quad df(x)\,[v] = f'(x)\,v = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\, d\mathfrak{X}_i(x)[v] .$$

Lassen wir x weg und bleiben beim Namen der Abbildgn.

$\Rightarrow$

Folgerung

$$df = \sum_{i=1}^{n} D_i f \; d\pi_i .$$

Aber wir haben ja $\pi_i(x) = x_i$, also können wir schreiben

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^{n} D_i f \; dx_i}$$

Diff.formen 0-ter Ordng. | Diff-formen 1. Ordnung

Andere Formulierung:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i .$$

Folgerung Die 1-Formen dx_i bilden offenbar eine duale Basis zur Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$. Zum Test unseres Wissens machen wir uns das noch einmal klar. Wir hatten definiert

$$df(x)[v] = f'(x)v = \nabla f(x) \cdot v$$

Für $f(x) = x_i$ folgt wegen $\nabla x_i = e_i$

$$dx_i(x)[v] = e_i \cdot v$$

$$\Rightarrow dx_i[e_j] = \delta_{ij} .$$

$\Rightarrow$ Jede Differentialform ω vom Grad k über G lässt sich eindeutig darstellen in der Normalform

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

mit "Koeffizientenfunktionen" $f_{i_1 \dots i_k} : G \to \mathbb{R}$.

Def 3.14 Die eben definierte Differentialform ω heißt stetig bzw differenzierbar, falls alle Koeffizientenfunktionen $f_{i_1 \dots i_k}$ diese Eigenschaft haben.

Damit der Kalkül der Differentialformen seine Kraft entfalten kann, brauchen wir Rechenregeln für die Differentiation von Differentialformen.

<u>Def 3.15</u> Es sei ω eine differenzierbare Differentialform vom Grad k mit der Normaldarstellung

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Dann heißt die Differentialform

$$d\omega := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} df_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

äußere Ableitung von ω. Sie hat den Grad $k+1$.

<u>Beispiel</u> Es sei $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ folgende Differentialform (wir wählen die x-y-z-Schreibweise)

$$\omega(x,y,z) = x^2\, dx \wedge dy + (x+y+z)\, dy \wedge dz$$

Beachte: das ist die Stelle $(x,y,z) \in G$, an der die Diff-form definiert ist. Ihre Anwendung auf $(v_1, v_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$ schreiben wir auf als $\omega(x,y,z)[v_1, v_2]$!

Dann folgt für $d\omega(x,y,z)$, kurz $d\omega$:

$$d\omega = dx^2 \wedge dx \wedge dy + d(x+y+z) \wedge dy \wedge dz$$

und wegen

$$df = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f\, dx_i \Rightarrow dx^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x} dx + \frac{\partial x^2}{\partial y} dy + \frac{\partial x^2}{\partial z} dz$$
$$= 2x\, dx$$

analog $d(x+y+z) = 1dx + 1dy + 1dz$,

daher

$$d\omega = 2dx \wedge dx \wedge dy + (dx + dy + dz) \wedge dy \wedge dz$$
$$= 2\underbrace{(dx \wedge dx \wedge dy)}_{=0} + dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dy \wedge dz + \underbrace{dz \wedge dy \wedge dz}_{=0}$$

(zwei Argumente gleich)

$$= \underline{\underline{dx \wedge dy \wedge dz}}$$

<u>Bemerkung</u> Da eine Differentialform ω sowohl vom Argument $x \in G$ abhängt als auch von $(v_1, \dots, v_k) \in \Lambda^k(V)$, kann die Schreibweise

$$\omega(x)(v_1, \dots, v_k)$$

etwas irritieren.

<u>Auswege</u>:
- $\omega(x)[v_1, \dots, v_k]$ ⇐ wir hier
- x einfach unterdrücken
- $\omega_x(v_1, \dots, v_k)$ schreiben ⇐ Teams-Skript

<u>Satz 3.16</u> (<u>Produktregel</u>) Sind ω und η differenzierbare Differentialformen vom Grad k bzw. l, dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

<u>Beweis</u>: Die äußere Ableitung erzeugt durch $\omega \mapsto d\omega$ offenbar eine lineare Abbildung. Da jedes ω in eine Summe bezügl. der einzelnen Basiselemente zerlegt werden kann, reicht es daher, für ω, η zu betrachten:

$$\omega = f \; dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\eta = g \; dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} .$$

Zunächst gilt wegen der Assoziativität der Operation $\wedge$ (Satz 3.10)

$$\omega \wedge \eta = f \cdot g \; dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

(beachte: für festes x wirkt $f(x) \cdot g(x)$ als reelle Zahl, die aus dem äußeren Produkt herausgezogen werden kann). Damit

$$d(\omega \wedge \eta) = \underbrace{d(fg)}_{\substack{\sum_1^n ((D_i f) \cdot g + f \cdot D_i g)\, dx_i \\ = (df) \cdot g + f \cdot dg}} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

g geht als reelle Zahl problemlos nach hinten durch

$$= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l})$$

$$+ f (dg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

geht nach hinten durch k Vertauschungen

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k (f \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots)$$

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \qquad \square$$

Zur Auflockerung behandeln wir noch ein Beispiel, das eigentlich vor Satz 3.16 gehört, denn es braucht die Produktregel nicht.

Bsp: $\omega(x,y) = \underset{f_1}{x}\, dy - \underset{f_2}{y}\, dx \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \quad \forall x,y$

$$d\omega = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2\, dx \wedge dy$$

Satz 3.17 Für jede zweimal stetige Differentialform ω gilt

$$d(d\omega) = 0,$$

kurz $d^2\omega = 0$.

Beweis: Wegen Linearität brauchen wir wieder nur ein "Einzelteil" einer Normalform von ω betrachten, also

$$\omega = f \underbrace{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}}_{=:\eta} \quad \text{mit } 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n,$$

mit $f \in C^2(G)$.

Dann

$$d(d\omega) = d(df \wedge \eta) = d\Big(\Big(\sum_{i=1}^n D_i f\, dx_i\Big) \wedge \eta\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^n d(D_i f\, dx_i \wedge \eta) \quad \text{(Linearität)}$$

$$= \sum_{i=1}^n d(D_i f) \wedge dx_i \wedge \eta \quad \text{(Def. der äußeren Abl.)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n D_j D_i f\, dx_j\Big) \wedge dx_i \wedge \eta$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_{i,j=1}^n D_j D_i f\, dx_j \wedge dx_i\Big)}_{= \sum_{i<j} \big(\underbrace{D_i D_j f - D_j D_i f}_{=0 \text{ (Schwarz)}}\big)\, dx_i \wedge dx_j} \wedge \eta \quad \text{Assoziativität}$$

wegen $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$

$$= 0 \qquad \square$$