3.3. Transformation von Differentialformen

Analog zur Integrationstheorie interessiert uns auch hier das Verhalten von Differentialformen unter Koordinatentransformationen.

<u>Def 3.18</u> Es sei $\omega \in \Lambda^k(V)$, $W = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f: U \to V$ differenzierbar. Dann wird durch

$$(f^*\omega)(x)[w_1,\dots,w_k] := \omega(f(x))[f'(x)w_1,\dots,f'(x)w_k]$$

eine Differentialform $f^*\omega \in \Lambda^k(W)$ definiert, die auf W zurückgeholte Diff.-Form; $x \in U$.

<u>Beachte</u>: $\omega(f(x))$ wird angewendet auf $v_1 = f'(x)w_1, \dots, v_k = f'(x)w_k$.

Es gelten folgende <u>Rechenregeln</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} f^*(\omega_1+\omega_2) &= f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2) \\ f^*(\omega\wedge\eta) &= f^*\omega \wedge f^*\eta \\ f^*(g^*\omega) &= (g\circ f)^*\omega \end{aligned}}$$

← Tut.
← HA

Vorbereitend für die weiteren Untersuchungen rufen wir Bekanntes aus dem Kurs Lineare Algebra zurück. Dazu sei

$$\eta \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) \text{ und } A \text{ eine } (n,n)\text{-Matrix}$$

Dann gilt

$$\boxed{\eta[Av_1,\dots,Av_n] = \det(A)\,\eta[v_1,\dots,v_n].}$$

<u>Beweis</u>: Wir wissen (Satz 3.11), dass $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ eindim. ist. Damit

$$\eta[Av_1,\dots,Av_n] = \tilde{\eta}[v_1,\dots,v_n] = \alpha\,\eta[v_1,\dots,v_n]$$

mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$. Es sei $A = (a_{ij})$. Dann

$$\eta[Ae_1,\dots,Ae_n] = \eta\Big[\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1},\dots,\sum_{i_n} a_{i_n n} e_{i_n}\Big]$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^n a_{i_1 1}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}\,\eta[e_{i_1},\dots,e_{i_n}]$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} a_{\pi(1),1}\cdots a_{\pi(n),n}\,\eta[e_{\pi(1)},\dots,e_{\pi(n)}]$$

b.w.

$$= \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \right) \eta[e_1, \dots, e_n]$$

$$= \det(A^T)\, \eta[e_1, \dots, e_n]$$

$$= \det(A)\, \eta[e_1, \dots, e_n]. \qquad \square$$

<u>Folgerung 3.19</u> Liegt in Def. 3.18 der Fall $k = m = n$ vor, dann gilt

$$\boxed{(f^*\omega)(x) = \det(f'(x))\, \omega(f(x))}$$

(Man setze $\eta = \omega(f(x))$, $A = f'(x)$.)

<u>Satz 3.20</u> Ist ω differenzierbar und f zweimal stetig diffbar, dann gilt

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

<u>Beweis</u> (i) <u>Zuerst sei $\omega = g$ eine 0-Form</u>, $g : U \to \mathbb{R}$.
Dann, für alle $v \in \mathbb{R}^m$, $x \in U$ (wir verwenden aus Gewohnheit v an Stelle von w)

$$(f^* dg)(x) \underset{\text{Def.}}{=} (dg)(f(x))[f'(x)v] \underset{\text{Def. } dg}{=} g'(f(x))\, f'(x) v$$

$$= (g \circ f)'(x) v \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$= d(g \circ f)(x)[v] = d(f^* g)(x)[v]$$

(zuletzt betrachten wir g als Differentialform, deshalb gilt nach Definition $(f^*g)(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$).

$$\Rightarrow \; f^* dg = d(f^* g) \qquad \text{"d geht durch"}$$

<u>Speziell:</u> Wähle $g(x) = x_i \Rightarrow (g \circ f)(x) = f_i(x) \Rightarrow f^* g = f_i$ und wegen $dg = dx_i$,

$$\boxed{f^*(dx_i) = df_i} \qquad (*)$$

(ii) <u>Allgemeiner Fall</u> Brauchen wegen Normaldarstellung nur betrachten:

$$\omega = \phi \; dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Dann folgt

$$f^*\omega = f^*(\phi\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}) \qquad \phi\ \text{0-Form}$$

$$= f^*(\phi\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}) \qquad \text{wegen } \alpha\omega = \alpha\wedge\omega \ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$= f^*\phi\wedge f^*dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge f^*dx_{i_k}$$

$$= \underbrace{f^*\phi}_{=\phi\circ f}\ f^*dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge f^*dx_{i_k} \qquad (f^*\phi \text{ ist 0-Form})$$

$\Rightarrow$

$$d(f^*\omega) = d(\phi\circ f\wedge df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_k}) \qquad \text{wegen } (*)$$

Produktregel $\Rightarrow$

$$= d(\phi\circ f)\wedge(df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_k})$$

$$+(-1)^0\,\phi\circ f\,\underbrace{d(df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_k})}_{=0}$$

$=0$, da alle f_{i_k} 2-mal differbar sind und daher $d(df_{i_k})=0$.

$$= d(\phi\circ f)\wedge df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_k}$$

$$= d(f^*\phi)\wedge\underbrace{df_{i_1}}_{f^*dx_i}\wedge\ldots\wedge df_{i_k}$$

$$= \underbrace{d(f^*\phi)}_{f^*d\phi \text{ wegen Teil (i)}}\wedge f^*dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge f^*dx_{i_k}$$

$$= f^*(d\phi\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}) = f^*(d\omega) \qquad \square$$

3.4. Das Lemma von Poincaré

Sie erinnern sich an den Begriff des vollständigen Differentials bei Kurvenintegralen.

Def. 3.21 Eine Differentialform ω vom Grad k heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$ gilt. Sie heißt exakt, wenn sie äußere Ableitung einer Differentialform η vom Grad $k-1$ ist, d.h.

$$\omega = d\eta .$$

Mit dieser Definition kann man Satz 3.17 auch so formulieren:

> Ist ω exakte Differentialform, d.h. $\omega = d\eta$ und η zweimal stetig differenzierbar, dann ist ω geschlossen.

Bsp. 3.22 Bei Kurvenintegralen der Form

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_\gamma \sum_{i=1}^n f_i(x)\, dx_i$$

hatten wir bereits vorsorglich $\omega := \sum_{i=1}^n f_i(x)\, dx_i$ als Differentialform bezeichnet (Übungen).

Das Vektorfeld f sei ein Gradientenfeld, d.h.

$$f_i(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Das heißt dann

$$\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx_i = d\phi .$$

Nach Def 3.21 ist also ω eine exakte Differentialform, wenn f ein Potential hat

#

Satz 3.23 (Lemma von Poincaré) Jede geschlossene Differentialform ω vom Grad $k \geq 1$ über einer konvexen Menge G ist exakt.

Beweis:

(i) Wir können $0 \in G$ annehmen. Andernfalls betrachten wir die Transformation $x \mapsto x-a$ mit einem festen $a \in G$. Das neue Gebiet $\tilde{G} := G - \{a\}$ enthält die Null. Die Determinante der Ableitung der Abbildung ist 1. Wende Folgerung 3.19 an.

Nun ordnen wir Differentialformen ω der Form

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1,\dots,i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

des Grades k eine Differentialform $I_k\omega$ vom Grad $k-1$ zu durch

$$(I_k\omega)(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \int_0^1 t^{k-1} f_{i_1,\dots,i_k}(tx)\, dt\; x_{i_m}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei $\sim$ bedeutet, dass $\wedge\, dx_{i_m}$ ausgelassen wird.

Wir zeigen für alle k-Formen ω:

$$\omega = d(I_k\omega) + I_{k+1}(d\omega).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung, denn dann gilt

$$\omega = d(\underbrace{I_k\omega}_{\eta}) = d\eta. \qquad (*)$$

(ii) Nachweis von $(*)$

Wieder reicht es aus, ein "Einzelteil"

$$\omega := f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

zu betrachten. Hierfür gilt nach Def. von $I_k\omega$

$$d(I_k\omega)(x) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} d\left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt\, x_{i_m}\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt\, x_{i_m}\right] dx_i\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$(-1)^{m-1}$

$$= \sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^k (D_i f)(tx)\, dt\, x_{i_m}\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt\right) dx_{i_m} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Produktregel; Beachte x_{i_m}!

$$= -\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^m \int_0^1 t^k (D_i f)(tx)\,dt\; x_{i_m}\, dx_i \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ k \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\,dt\; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \qquad (**)$$

Die letzte Vereinfachung kommt daher, dass dx_{i_m} gerade das ausgelassene $\widetilde{dx_{i_m}}$ ersetzt und zum Verschieben auf die Stelle von $\widetilde{dx_{i_m}}$ gerade $m-1$ Vorzeichenwechsel entstehen. Insgesamt hat man dann k-mal den gleichen Summanden.

Andererseits gilt

$$I_{k+1}(d\omega)(x) = I_{k+1}\Big(\sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x)\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\Big)$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^k (D_i f)(tx)\,dt\; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \int_0^1 t^k (D_i f)(tx)\,dt\; x_{i_m}\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx_{i_m}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$(*\overset{*}{*})$$

Addieren wir $(**)$ und $(*\overset{*}{*})$, dann heben sich die Doppelsummen gegenseitig auf und wir erhalten

$$d(I_k\omega)(x) + I_{k+1}(d\omega)(x)$$

$$= k \int_0^1 t^{k-1} f(tx)\,dt\; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^k (D_i f)(tx)\,dt\; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t^k f(tx)\big)\,dt}_{= f(x)}\; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$= f(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \omega(x).$$

Damit haben wir $(*)$ gezeigt. $\square$