<u>Bemerkung</u>: Offenbar kann im Satz die Voraussetzung der Konvexität von G dadurch ersetzt werden, dass G eine sternförmige Menge mit "Mittelpunkt" $a \in G$ ist.

<u>Def</u> Zwei Mengen $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ heißen <u>zueinander diffeomorph</u>, wenn es eine unendlich oft differenzierbare Bijektion $f: G_1 \to G_2$ gibt, deren Umkehrfunktion ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist. f heißt <u>Diffeomorphismus</u> (Wdh. aus Kurs Analysis II).

<u>Bemerkung</u> Nach Def. gilt $id = (f^{-1} \circ f)(x)$. Deshalb

$$id'(x) = id = (f^{-1})'(f(x))f'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$\Rightarrow f'(x)$ ist invertierbar für alle $x \in G_1$.
Wegen des Satzes über die Umkehrfunktion ist eine unendlich oft diffbare Fkt $f: G_1 \to G_2$ schon dann ein Diffeomorphismus, wenn $f'(x)$ für alle $x \in G_1$ invertierbar ist.

<u>Satz 3.24</u> Es sei G offen und diffeomorph zu einer offenen sternförmigen Menge $\tilde{G}$. Dann ist jede geschlossene Differentialform ω vom Grad $k \geq 1$ über G exakt.

<u>Beweis</u>: Sei $f: G \to \tilde{G}$ der zugehörige Diffeomorphismus und $g := f^{-1}$. Dann

$$d(g^*\omega) = g^*(\underbrace{d\omega}_{=0}) = 0 \qquad \Rightarrow g^*\omega \text{ ist geschlossen über } \tilde{G}$$

(beachte $(g^*\omega)(x) = \omega(g(x)) = \omega(\underbrace{f^{-1}(x)}_{\in \tilde{G}})$).

Folglich (Satz 3.23, Poincaré) ist $g^*\omega$ exakt,

$$g^*\omega = d\tilde{\eta} \quad , \tilde{\eta}: (k-1)\text{-Form über } \tilde{G}.$$

Setzen $\eta = f^*\tilde{\eta}$. Dann gilt

$$d\eta = d(f^*\tilde{\eta}) = f^*(d\tilde{\eta}) = f^*(g^*\omega) = (\underbrace{g \circ f}_{id})^*(\omega) = \omega.$$

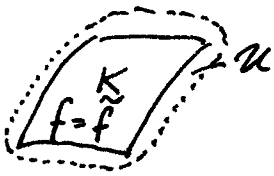
$\Rightarrow \omega$ ist exakt. $\square$

4. Die Integration von Differentialformen

4.1. Integration über Flächenstücke

Wir betrachten eine Abb. $f: K \to \mathbb{R}^n$, wobei $K \subset \mathbb{R}^k$ kompakt ist. Mit der Definition der Differenzierbarkeit von f auf dem Rand ∂K gibt es dann Probleme. Daher:

Def. 4.1 $f: K \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig differenzierbar (bzw. zweimal stetig differenzierbar etc.), wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^n$ gibt mit U offen, $U \supset K$ und $\tilde{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in K$.
Kurz $f = \tilde{f}|_K$. (analog für zweimal stetig diffbar etc.)



Analog definiert man stetige Diffbarkeit (bzw. zweimal stetige Diffbarkeit etc.) von Differentialformen $\omega: K \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ auf kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^k$.

Def 4.2. Es sei $K \subset \mathbb{R}^k$ kompakt. Eine k-Form

$$\omega: K \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$$
$$x \mapsto a(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

mit $a: K \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über K genau dann, wenn a über K integrierbar ist.
Wir definieren dann

$$\boxed{\int_K \omega := \int_K a(x)\, dx}$$

und nennen $\int_K \omega$ das Integral von ω über K.

Bemerkung: $dx \mathrel{\hat{=}} d\lambda^k$, k-dimensionales Lebesgue-Maß.

Def 4.3 Eine stetig diffbare Funktion $f: K \to \mathbb{R}^k$ heißt orientierungstreu, wenn gilt

$$\det f'(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{K} = \operatorname{int} K.$$

Satz 4.4 Es sei $\lambda^k(\partial K)=0$, d.h. ∂K ist eine Nullmenge. Weiter sei $f: K \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und $f|_{\mathring{K}}$ sei bijektiv und orientierungstreu. Dann gilt

$$\int_K f^*\omega = \int_{f(K)} \omega. \quad \text{für } \omega \text{ aus Def. 4.2}$$

Beweis: Nach Definition von ω und Satz (Folgerung) 3.19:

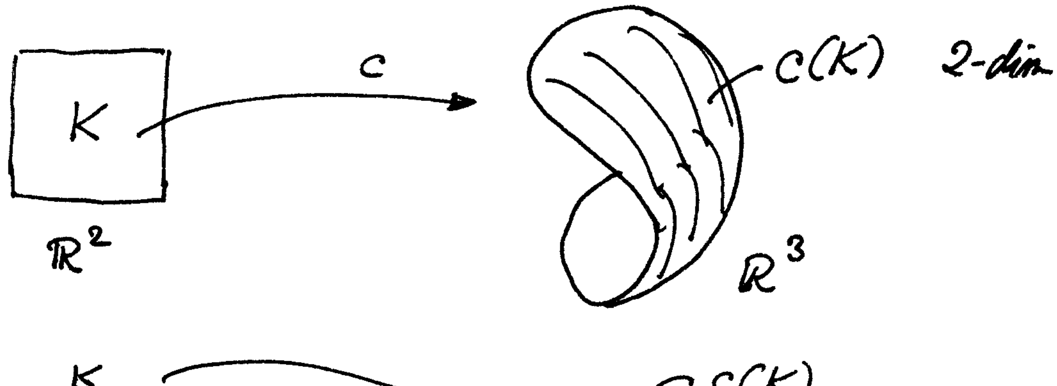
$$(f^*\omega)(x) = a(f(x)) \det f'(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k .$$

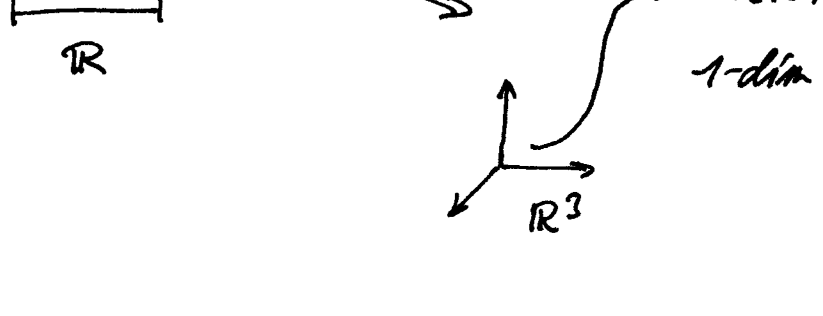
Damit

$$\int_K f^*\omega = \int_K a(f(x)) \underbrace{\det f'(x)}_{>0} dx \underset{\text{Transformationssatz}}{=} \int_{f(K)} a(x)\, dx = \int_{f(K)} \omega \quad \square$$

Wir wiederholen nun einen Begriff, den Sie bereits in der Übung kennengelernt haben. Besser gesagt, wir verfeinern ihn noch.

Def. 4.5 Ein *k-dimensionales* (parametrisiertes) *Flächenstück* c im $\mathbb{R}^n$ ist eine *stetig diffbare* Abbildung einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^k$ in den $\mathbb{R}^n$. K heißt *Parameterbereich* von c. Die Bildmenge $c(K)$ heißt *Spur von c*.





Def 4.6. Eine Differentialform $\omega : c(K) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ heißt heißt über das Flächenstück $c : K \to \mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn die (zurückgeholte) Differentialform $c^*\omega$, $c^*\omega : K \to \Lambda^k(\mathbb{R}^k)$ über K integrierbar ist. Wir definieren dann

$$\int_c \omega := \int_K c^*\omega$$

Satz 4.7 (Parameterinvarianz) Der Rand ∂K habe das Maß Null, $f : K \to \mathbb{R}^k$ sei stetig differenzierbar und die Einschränkung $f|_{\overset{\circ}{K}}$ sei injektiv und orientierungstreu. Dann ist $\omega : (c \circ f)(K) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ genau dann über $c \circ f : K \to \mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn ω über $c : f(K) \to \mathbb{R}^n$ integrierbar ist. Dabei gilt

$$\int_{c\circ f} \omega = \int_c \omega$$

Kurz: Der Wert des Integrals hängt nicht von der Parametrisierung ab!

Beweis. Nach Def. 4.6. gilt

$$\int_{c\circ f} \omega = \int_K (c\circ f)^*\omega = \int_K f^*(c^*\omega)$$

und weiter

$$\int_K f^*(c^*\omega) = \int_{f(K)} c^*\omega \underset{\text{Def. 4.6}}{=} \int_c \omega .$$

Das zeigt die Gleichheit der Integrale und die Integrierbarkeit sieht man per Definition. $\square$

Def 4.8 (Nulldimensionale Flächenstücke) Ein nulldim. Flächenstück c besteht aus einem einzelnen Punkt und wird definiert als Abbildung $\{0\} \to \mathbb{R}^n$.

Das Integral einer 0-Form (also einer reellen Funktion) ω über c ist definiert durch

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

Wir beleuchten den Stoff durch zwei Beispiele.

Bsp 4.9 (Eindim. Flächenstück)

Ein eindim. Flächenstück ist eine Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Es sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i$ eine 1-Form, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$

Dann

$$\begin{aligned} c^*\omega(x)[v] &= \omega(c(x))\,[c'(x)v] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(c(x))\, dx_i[c'(x)v] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(c(x))\, c_i'(x)v \\ &= f(c(x))\cdot c'(x)v = f(c(x))\cdot c'(x)\,dx[v] \end{aligned}$$

$c'(x) \mathrel{\hat=}$ Spaltenvektor!

$$\Rightarrow c^*\omega(x) = f(c(x))\cdot c'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_c \omega = \int_a^b f(c(x))\cdot c'(x)\,dx$$

analog zur Übung...

Bsp 4.10 Wir betrachten eine Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ und die Kurve mit gleicher Spur aber umgekehrter Orientierung $\tilde{c}(x) = c(1-x)$.

Dann folgt aus 4.9.

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} \omega &= \int_0^1 f(\tilde{c}(x))\cdot \tilde{c}'(x)\,dx = \int_0^1 f(c(\underbrace{1-x}_{t}))\cdot c'(1-x)\underbrace{(-1)dx}_{dt} \\ &= \int_1^0 f(c(t))\,c'(t)\,dt \\ &= -\int_0^1 f(c(t))\cdot c'(t)\,dt = -\int_c \omega. \end{aligned}$$

Ursache: $(1-x)' < 0$.

Folgerung Das Integral einer Differentialform über eine Kurve hängt von der Orientierung der Kurve ab

4.2. Integration über Ketten

Ketten sind zur formalen Vereinfachung der Schreibweise von Integralen über aus "Einzelteilen" zusammengesetzten Flächenstücken sinnvoll. Sie ermöglichen ganz einfach eine kurze und elegante Notation, sind aber anfangs etwas gewöhnungsbedürftig.

Wir hatten als parametrisierte Flächenstücke Abbildungen $c: K \to \mathbb{R}^n$ eingeführt mit kompakter Menge $K \subset \mathbb{R}^k$.

Nun verwenden wir für K

$$Q^k := \{ x \in \mathbb{R}^k : 0 \le x_i \le 1, \ i = 1, \dots, k \},$$

den <u>k-dim. Einheitswürfel</u>

als Parameterbereich. Ferner betrachten wir

$$I^k(\mathbb{R}^n) = \text{Menge aller } k\text{-dim. Flächenstücke } c: Q^k \to \mathbb{R}^n$$

Damit enthält $I^k(\mathbb{R}^n)$ alle C^1-Abbildungen $c: Q^k \to \mathbb{R}^n$.

<u>Def. 4.11:</u> Eine <u>k-dimensionale Kette</u> im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $C: I^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$, die nur für endlich viele Flächenstücke c einen Wert $C(c) \neq 0$ annimmt. Als Spur $|C|$ der Kette bezeichnet man die Vereinigung aller Spuren der Flächenstücke $c \in I^k(\mathbb{R}^n)$ mit $C(c) \neq 0$:

$$|C| = \bigcup_{\substack{c \in I^k(\mathbb{R}^n) \\ C(c) \neq 0}} c(Q^k).$$

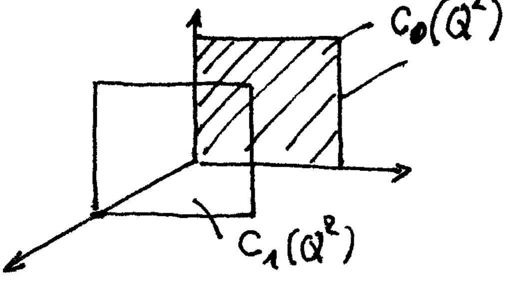
<u>Beispiel</u> 4.12. $k = 2$, $n = 3$;

$$Q^2 = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \}$$

Betrachten 2 Abbildungen $c_i : Q^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$c_1 : (x,y) \mapsto (1, x, y)$$

$$c_0 : (x,y) \mapsto (0, x, y)$$



Man könnte hier folgende 2-Kette definieren:

(i) $$C(c) = \begin{cases} 1 & c = c_0 \\ 2 & c = c_1 \\ 0 & c \neq c_0, c_1 \end{cases}$$

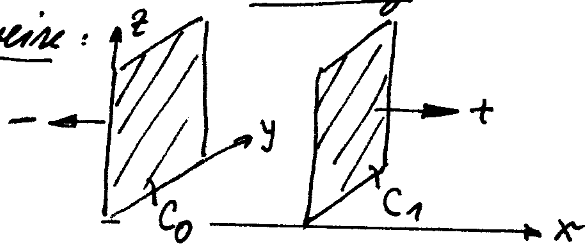
Dann bekommt man ganz einfach eine Nummerierung der beiden Abbildungen. Auch Folgendes ist eine 2-Kette:

(ii) $$C(c) = \begin{cases} 2 & c = c_0 \\ 3 & c = c_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das kommt dem eigentlichen Anliegen schon etwas näher. Diese Wahl soll ausdrücken: Integriere 2-mal über c_0, 3-mal über c_1. Schließlich, um dabei zu bleiben,

(iii) $$C(c) = \begin{cases} -1 & c = c_0 \\ 1 & c = c_1 \end{cases}$$

wird diese Wahl dazu benutzt, um noch eine Richtung der Integration anzugeben. Beispielsweise:



Def. 4.11 (Fortsetzung der Def.) Jedes einzelne Flächenstück $c \in I^k_{\#}(\mathbb{R}^n)$ identifiziert man mit der Kette $C : I^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{Z}$ mit $C(c) = 1$ und $C(d) = 0$ für alle anderen Flächenstücke $d \in I^k(\mathbb{R}^n)$.

Damit können wir für jede Kette C schreiben

$$C = \sum_{c \in I^k(\mathbb{R}^n)} C(c)c. \qquad (*)$$

Hierbei ist das Zeichen "+" in der Summe als Verknüpfung von Ketten im Sinne einer Gruppenoperation zu verstehen.

Bsp 4.13: Im Beispiel (iii) von oben heißt $(*)$

$$C = -c_0 + c_1,$$

was bedeutet: Integriere je einmal über c_0, c_1 und dabei bei c_0 in "negativer Richtung".

Das bedeutet nicht (!) die Addition der Funktionen c_0, c_1, also nicht

$$C = c_0 - c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vereinbarungen

- Die Zahl $C(c)$ gibt an, wie oft über c integriert wird
- Die Kette nC, $n \in \mathbb{Z}$, ist die Kette mit der Abbildungsvorschrift $$(nC)(c) = nC(c) \quad \forall c \in I^k(\mathbb{R}^n).$$
- $Q^0 := \{0\}$.

Wir betrachten als Nächstes eine geeignete Darstellung des Randes des Einheitswürfels Q^k. Eine Seitenfläche von Q^k ergibt sich dadurch, dass eine Variable – sagen wir x_i – 0 oder 1 ist und die anderen x_j das Intervall $[0,1]$ durchlaufen.

Wir definieren dazu Abbildungen

$$S_i^\alpha : \ Q^{k-1} \ni x \longmapsto \sum_{j<i} x_j e_j + \alpha e_i + \sum_{j>i} x_j e_j \in Q^k$$

$\alpha \in \{0,1\}$.

Zum Beispiel: $S_k^0(x_1,\dots,x_{k-1}) = (x_1,\dots,x_{k-1},0)$

$S_k^1(x_1,\dots,x_{k-1}) = (x_1,\dots,x_{k-1},1)$

Def. 4.14 (Darstellung des Randes eines Flächenstücks)

Der Rand ∂c des k-dimensionalen Flächenstücks $c \in I^k(\mathbb{R}^n)$ ist die $(k-1)$-dimensionale Kette

$$\partial c := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (c \circ S_i^1 - c \circ S_i^0)$$

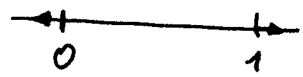
Bsp 4.15. Rand von Q^k.

Natürlich ist Q^k selbst ein Flächenstück. Wir erhalten es durch die Parametrisierung $c = id$. Damit

$$\partial Q^k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} (S_i^1 - S_i^0)$$

Speziell: **k = 1**: $S_1^0 = \{0\}$, $S_1^1 = \{1\}$, $Q^1 = [0,1]$

$$\partial Q^1 = -S_1^0 + S_1^1 \quad \hat{=} \quad \underline{-\{0\} + \{1\}}$$

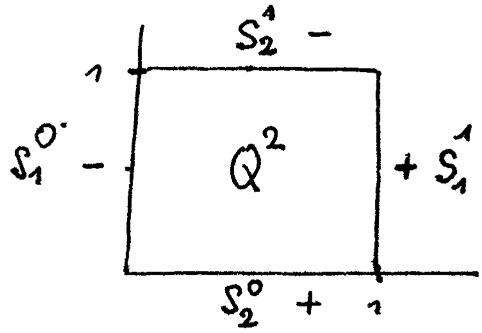


k=2: $S_1^0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $S_1^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$S_2^0(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_2^1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\partial Q^2 = (-1)^0 (S_1^1 - S_1^0) - (S_2^1 - S_2^0)$$

$$= \underline{S_1^1 - S_1^0 - S_2^1 + S_2^0}$$



Def. 4.16 Der Rand der k-dimensionalen Kette C ist

$$\partial C = \sum_c C(c)\, \partial c$$

Def. 4.17 Eine auf der Spur $|C|$ der k-dimensionalen Kette C in $V = \mathbb{R}^n$ definierte Differentialform ω vom Grad k heißt über C integrierbar, wenn ω über alle Flächenstücke c mit $C(c) \neq 0$ integrierbar ist ($c \in I^k(\mathbb{R}^n)$). In diesem Fall setzt man

$$\int_C \omega := \sum_{c \in I^k(\mathbb{R}^n)} C(c) \int_c \omega$$

Bemerkung: Hier ist die Summe im Sinne der Addition von $\mathbb{R}$ zu verstehen!

Beispiel 4.18 Wir betrachten (iii) aus Bsp 4.12.:

$$\int_C \omega = \int_{c_1 - c_0} \omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{obige Def}}}{=} \int_{c_1} \omega - \int_{c_0} \omega$$