Weil Ketten "Summen" von Flächenstücken sind, folgt daraus für Summen von Ketten

$$C = \sum_{\nu=1}^{\ell} C_\nu \Rightarrow \int_C \omega = \sum_{\nu=1}^{\ell} \int_{C_\nu} \omega .$$

4.3. Grundvariante des Satzes von Stokes

Nach unserem doch etwas abstrakt erscheinenden Ausflug in die Welt der Differentialformen können wir nun beginnen, langsam die Ernte einzufahren. Der folgende Satz ist dazu der wichtigste Baustein

Satz 4.19 (Stokes, Cartan) Es sei C eine k-dimensionale Kette im $\mathbb{R}^n$ und ω eine auf der Spur $|C|$ von C definierte stetig differenzierbare $(k-1)$-Form, d.h. $\omega : |C| \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega .}$$

Beweis:

(i) Zuerst beginnen wir mit dem einfachsten Fall: Mit dem Einheitswürfel als Spur, also

- $|C| = Q^k$
- $C \triangleq c : Q^k \to Q^k$, $c(x) = x$ (triviale Parametrisierung von Q^k).

- Beachte: Damit $c : Q^k \to \mathbb{R}^k$, also Fall $n = k$!

In diesem Fall vereinfacht sich natürlich die Normalform einer Differentialform ω vom Grad $(k-1)$: Es gibt nur k Varianten, $(k-1)$ verschiedene dx_i aus $dx_1, \ldots, dx_k$ auszuwählen – ganz einfach durch Streichen eines der Differentiale.

Können daher schreiben

$$\omega(x) = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{(i-1)} a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k .$$

Die Wahl der Minuszeichen ist ganz einfach passend hingebogen.

Betrachten nun ein "Einzelteil"

$$\eta := (-1)^{i-1} a(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k .$$

$$\Rightarrow \quad d\eta = (-1)^{i-1} da(x) \wedge dx_1 \wedge \dots$$

$$\int_C d\eta = \int_C (-1)^{i-1} da \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

$$= \int_C (-1)^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \Big) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

Wegen $dx_j \wedge dx_j = 0$ bleibt nur $j = i$ übrig und wir können dabei dx_i von vorn in die Fehlstelle $\widetilde{dx_i}$ verschieben durch $(k-1)$ Transpositionen $\Rightarrow$

$$= \int_C \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \qquad \text{(ohne Fehlstelle)}$$

$$= \int_Q \frac{\partial a}{\partial x_i} dx \qquad \text{(nach Def. des Integrals einer Diff-form).}$$

$$= \underbrace{\int_{x_1=0}^{1} \dots \int_{x_k=0}^{1}}_{\text{ohne } \int_{x_i=0}^{1}} \Big(\int_{x_i=0}^{1} \frac{\partial a}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_i, \dots x_k)\, dx_i \Big) dx_1 \dots \widetilde{dx_i} \dots dx_k$$

(Fubini)

$$= \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{(k-1)\text{-mal}} \Big[\underbrace{a(x_1, \dots, 1, \dots x_k)}_{a(S_i^1)} - \underbrace{a(x_1, \dots, 0, \dots x_k)}_{a(S_i^0)} \Big] dx_1 \dots \widetilde{dx_i} \dots dx_k \qquad \text{(Hauptsatz)}$$

$$= \int_{Q^{k-1}} a(S_i^1) - a(S_i^0)\, dx$$

$$= (-1)^{i-1} \Big(\int_{Q^{k-1}} (S_i^1)^* \eta\, dx - \int_{Q^{k-1}} (S_i^0)^* \eta\, dx \Big) \qquad (+)$$

(Def. von $f^*\eta$; $(-1)^{i-1}$ geborgt wegen $\eta = (-1)^{i-1} \dots$)

Nun nun das noch geschickt in die Sprache der

Differentialformen zurücktransformiert werden. Betrachten dazu für festes $j \in \{1, \dots, k\}$

$$g(x) = x_j .$$

Für $x \in \mathbb{R}^{k-1} \Rightarrow g(S_j^\alpha(x)) \underset{\uparrow}{=} \alpha \quad , \alpha \in \{0,1\}$

j-te Komponente von S_j^α ist die "Randkomponente, die 0 oder 1 ist.

Deshalb

$$(S_j^\alpha)^* dg = d(S_j^\alpha)^* g = d(g \circ S_j^\alpha) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \underbrace{(g \circ S_j^\alpha)}_{=\alpha}}_{=0} dx_\nu = 0$$

Nach Def. von g, $g = x_j$, heißt das

$$(S_j^\alpha)^* dx_j = 0 .$$

Damit, für $j \neq i$

$$(S_j^\alpha)^* \eta = (-1)^{i-1} (a \circ S_j^\alpha) \underbrace{(S_j^\alpha)^* dx_1}_{=0} \wedge \dots \wedge \underbrace{(S_j^\alpha)^* \widetilde{dx_i}}_{\text{fehlt}} \wedge \dots \wedge \underbrace{(S_j^\alpha)^* dx_k}_{=0}$$

$$= 0$$

Wir haben gezeigt:

$$\int_{Q^{k-1}} (S_j^\alpha)^* \eta = 0 \quad , \quad j \neq i .$$

Durch Hinzunahme solcher Terme wird also nichts geändert, somit

$$\int_C d\eta \underset{\substack{\uparrow \\ (+)}}{=} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_{Q^{k-1}} (S_j^1)^* \eta - \int_{Q^{k-1}} (S_j^0)^* \eta \right)$$

$$= \int_{\partial C} \eta \qquad \text{nach Def. 4.14.}$$

Nach Summation über alle Einzelteile $\eta = \eta_i$ ergibt sich

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \qquad \text{für "} C = Q^k \text{".}$$

(ii) Ein einzelnes Flächenstück $c : Q^k \to \mathbb{R}^n$

Wir schalten das Flächenstück $\tilde{c} : Q^k \to \mathbb{R}^k$, $\tilde{c}(x) = x$ vor, um Fall (i) zu nutzen.

$$\int_c d\omega \underset{\text{Def. von } \int_c}{=} \int_{Q^k} c^*(d\omega) = \int_{Q^k} d(c^*\omega) \underset{\tilde{c} \text{ parametrisiert } Q^k}{=} \int_{\tilde{c}} d(c^*\omega)$$

$$= \int_{\partial\tilde{c}} c^*\omega = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \Big(\int_{Q^{k-1}} \underbrace{(S_i^1)^*(c^*\omega)}_{(c \circ S_i^1)^*\omega} - \int_{Q^{k-1}} \underbrace{(S_i^0)^*(c^*\omega)}_{(c \circ S_i^0)^*\omega} \Big)$$

(Endergebnis von Fall (i))

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{(i-1)} \Big(\int_{c \circ S_i^1} \omega - \int_{c \circ S_i^0} \omega \Big)$$

$$= \int_{\partial c} \omega \qquad \text{(Def. des Integrals über } \partial c\text{)}.$$

Damit ist der Satz für ein Flächenstück gezeigt

(iii) Erweiterung auf Ketten

Sei $C = \sum_{C(c) \neq 0} C(c)c = \sum_c C(c)c$.

Dann nach unseren Vereinbarungen

$$\int_C d\omega = \sum_c C(c) \int_c d\omega = \sum_c C(c) \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial C} \omega. \qquad \square$$

Dieser Satz ist noch etwas zu speziell. Er kann nur angewendet werden auf relativ einfache Situationen, im Prinzip dann, wenn Flächenstücke durch eine einzige Parametrisierung dargestellt werden können und deren Rand ebenfalls. Dennoch werden wir zunächst die Bedeutung dieser Version des Stokeschen Satzes anhand der wichtigsten klassischen Integralsätze herausarbeiten.

4.4. Anwendungen des Satzes von Stokes

4.4.1 Der eindimensionale Fall $k = n = 1$

Wir betrachten $k = 1$, d.h.

$$Q^1 = [0,1]$$

und eine $k-1 = 0$ - Form ω auf $[0,1]$, die wir der Zweckmäßigkeit halber mit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bezeichnen. f sei stetig diffbar. c sei die triviale Parametr. von $[0,1]$.

Stokes $\Rightarrow$ $$\int_c df = \int_{\partial c} f$$

Wir wissen: $df = f'(x)\,dx$. Nach Def. des Integrals über eine Differentialform folgt daraus $(c(x) = x)$

$$\int_c df = \int_{[0,1]} f'(x)\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx. \quad (*)$$

Weiter gilt nach Def. des Randintegrals

$$\int_{\partial c} f = (-1)^0 \big(f(\underbrace{S_1^1}_{1}) - f(\underbrace{S_1^0}_{0}) \big)$$

und daher

$$\int_{\partial c} f = f(1) - f(0). \qquad (**).$$

Natürlich schreibt niemand $\int_c df$, sondern man identifiziert c mit der Spur $|c| = [0,1]$, somit folgt aus $(*)$, $(**)$

$$\int_{[0,1]} df \left(= \int_0^1 f'(x)\,dx \right) = f(1) - f(0)$$

Das ist der klassische <u>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.</u>

Analog folgt

$$\int_{[a,b]} df = f(b) - f(a)$$

durch Parametrisierung mit $c(x) = a + x(b-a)$, $x \in [0,1]$.

4.4.2 Fall $k=1$, $n>1$ – Kurven im $\mathbb{R}^n$

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, also eine parametrisierte Kurve bzw. ein 1-dimensionales Flächenstück. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ebenfalls stetig differenzierbar.

In der Übung haben wir das folgende Integral behandelt:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

Wir wollen nun den Bezug zu Differentialformen herstellen.

Wir setzen dazu voraus, dass f ein Gradientenfeld ist, d.h.

$$f_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

mit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (es würde ausreichen, f und φ nur auf der Spur Γ von γ zu betrachten).

Wir setzen:

Differentialform ω: $\quad \omega(x) := \varphi(x) \quad$ (0-Form)

1-d-Flächenstück c : $\quad c(x) = \gamma(a + x(b-a))$

$\quad c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

Integral: $\quad \int_c d\varphi$

Satz von Stokes $\Rightarrow \quad \int_c d\varphi = \int_{\partial c} \varphi$

Wie berechnen wir die beiden Integrale? Analog zu

Abschnitt 4.4.1 ergibt sich für das rechte Integral

$$\int_{\partial c} \varphi = \varphi(c(1)) - \varphi(c(0)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Für das linke:

$$\int_c d\varphi = \int_{[0,1]} c^*(d\varphi) = \int_{[0,1]} d(\varphi \circ c)(x) = \int_{[0,1]} \varphi'(c(x))\, c'(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \nabla\varphi(c(x)) \cdot c'(x)\, dx = \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(x)) \cdot \dot{\gamma}(x)\, dx$$

Unter Beachtung von $f(x) = \nabla\varphi(x)$ folgt daher aus dem Satz von Stokes wieder eine bekannte Tatsache:

$$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)),$$

falls f ein Potential hat.

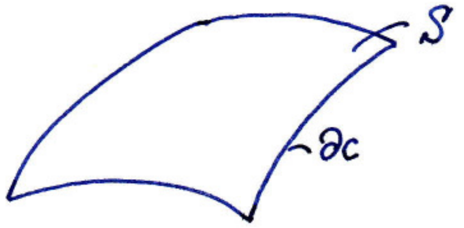
Bis jetzt hat uns also der Satz von Stokes nichts Neues gebracht. Er entfaltet seine Kraft erst in höheren Dimensionen!

4.4.3. 2-dimensionale Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ – Fall $k=2$, $n=3$

Wir betrachten den Parameterbereich

$$Q^2 = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$$

und ein 2-dimensionales Flächenstück $c : Q^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Spur $S = c(Q^2)$.



Sei $S \subset G$, G offen in $\mathbb{R}^3$

Differentialform ω: $\quad \omega(r) = P(r)\,dx + Q(r)\,dy + R(r)\,dz$

mit $r = (x,y,z)^T$

Kurz: $\boxed{\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{1-Form}}$

Berechnung von $d\omega$

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \qquad \text{(nach Def. von } d\omega)$$

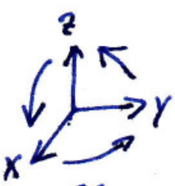
Nebenrechnung: $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$

$$\Rightarrow dP \wedge dx = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx$$

analog
$$dQ \wedge dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy$$

$$dR \wedge dz = \frac{\partial R}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dz}_{-dz \wedge dx} + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz$$

Man beachte die übliche Reihenfolge im x-y-z-System



Die unterschlängelten Differentiale sind zu vertauschen.

also z-x-Ebene statt x-z-Ebene!

$$\Rightarrow \boxed{d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Damit liefert uns der allgemeine Satz von Stokes folgende, schon etwas klassischer formulierte Variante des Satzes, den "eigentlichen" Satz von Stokes:

<u>Satz 4.16</u> Es sei $c: Q^2 \to \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionales Flächenstück, $G \subset \mathbb{R}^3$ eine die Spur von c umfassende offene Menge und $P, Q, R : G \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_c \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$= \int_{\partial c} P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

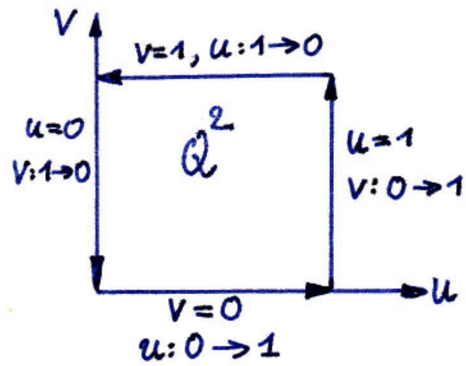
wobei ∂c die in Def. 4.14 definierte, den Rand von c darstellende Kette ist.

Bleiben zunächst folgende Fragen:

- Wie berechnet man diese Integrale konkret?
- Auf welche Weise stellt man ∂c dar?
- Wie kann man sich diese Formeln merken?

<u>Darstellung von ∂c</u>

Eine Skizze soll das Verständnis erleichtern:



Der Rand ∂Q^2 ist die Spur einer stückweise glatten Kurve, die in 4 Teilkurven zerfällt. Diese werden beschrieben durch die Funktionen S_i^α, die in Beispiel 4.15 diskutiert wurden.

Jetzt wird auch der eigenartige Faktor $(-1)^{i-1}$ in Def 4.14 klar. Er zeigt an, in welcher Richtung die Koordinatenachsen u, v durchlaufen werden. Jedenfalls tut er das hier, wo der Rand eindimensional ist: