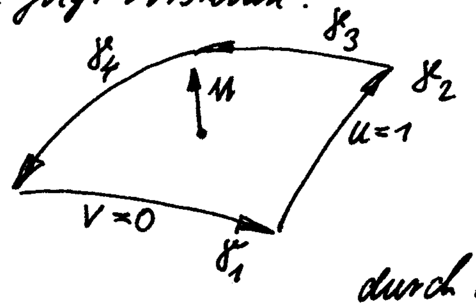
Der Rand ∂Q^2 ist eine Kette, die uns zunächst nicht weiter interessiert. Sein Bild $c(\partial Q^2)$ ist ebenfalls eine, die wir uns wie folgt vorstellen:

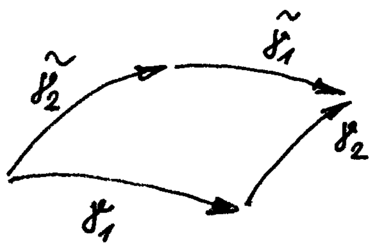


Der Durchlaufsinn von $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ wird so festgelegt, dass die Randkurve im Sinne der in der Übung eingeführten, durch den Normalenvektor n induzierten Orientierung positiv orientiert ist.

In diesem Sinne ist ∂c die Kette

$$C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 =: \gamma .$$

Wir hätten aber auch so herangehen können:



Dann ist γ die Kette
$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_2 .$

Wir wollen diese Dinge, deren allgemeine Behandlung sehr kompliziert ist, nicht diskutieren, sondern $\partial c = \gamma$ in der oberen Form verwenden.

Berechnung des Randintegrals

Wir wissen nun

$$\int_{\partial c} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Die Einzelintegrale sind nun Integrale über Differentialformen vom Grad $k=1$ über einer Menge des $\mathbb{R}^1$. Wir haben z.B.

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \int_{u \in [0,1]} P(c(u,0)) \frac{\partial x}{\partial u}(u,0)\,du \qquad c(u,0) = \begin{pmatrix} x(u,0) \\ y(u,0) \\ z(u,0) \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 P(c(u,0)) \frac{\partial x}{\partial u}(u,0)\,du$$

Dabei sind wir genau so vorgegangen, wie es die Theorie der Differentialformen vorschreibt. Beachte z.B., dass γ_1 die Kurve $a : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $a(u) = c(u,0)$ ist. Somit

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \int_a P\,dx = \int_{[0,1]} P\circ a \; a^*(dx) = \int_{[0,1]} P\circ a \; d(\underbrace{a^*x}_{c(u,0)})$$

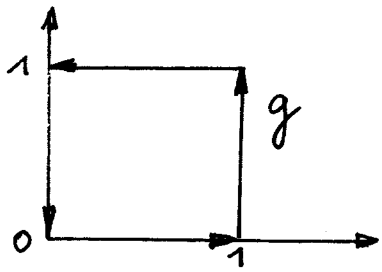
$$= \int_0^1 P(c(u,0))\,\frac{\partial c}{\partial u}(u,0)\,du .$$

Wir sehen damit, wie wir die Berechnung des Integrals formalisieren können, ohne jeweils lange nachdenken zu müssen, denn das kennen wir nun schon aus den Übungen:

$$\boxed{\int_{\partial c} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_g \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot dr}$$

<u>Vektorielles Kurvenintegral</u>!

<u>Mit</u>: $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, g: Randkurve des Einheitsvierecks, im mathematisch positiven Sinn zu durchlaufen



<u>Berechnung des Oberflächenintegrals</u>

$$\int_c \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{f_1} dy\wedge dz + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)}_{f_2} dz\wedge dx + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{f_3} dx\wedge dy = ?$$

Wir legen f_1, f_2, f_3 wie angegeben fest, also $\int_c \dots = \int_c \eta$ mit

$$\eta = f_1\, dy\wedge dz + f_2\, dz\wedge dx + f_3\, dx\wedge dy .$$

Dann folgt

$$c^*\eta = f_1\circ c\; c^*(dy)\wedge c^*(dz) + f_2\circ c\; c^*(dz)\wedge c^*(dx) + f_3\circ c\; c^*(dx)\wedge c^*(dy)$$

$= d(y\circ c) = dy(u,v)$, denn $y\circ c$ ergibt die zweite Komponente von $c(u,v)$, also $y(u,v)$. Analog die anderen Variablen

$$= f_1\circ c\; dy(u,v)\wedge dz(u,v) + f_2\circ c\; dz(u,v)\wedge dx(u,v) + f_3\circ c\; dx(u,v)\wedge dy(u,v)$$

(die Variablen u,v wurden nur zum besseren Verständnis benutzt) und mit $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, $y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$ usw (analog zu den Übungen)

$$\begin{aligned} c^*\eta = & f_1 \circ c \quad (y_u\,du + y_v\,dv) \wedge (z_u\,du + z_v\,dv) \\ & + f_2 \circ c \quad (z_u\,du + z_v\,dv) \wedge (x_u\,du + x_v\,dv) \\ & + f_3 \circ c \quad (x_u\,du + x_v\,dv) \wedge (y_u\,du + y_v\,dv) \\ = & f_1 \circ c \quad (y_u z_v - y_v z_u)\,du \wedge dv \\ & + f_2 \circ c \quad (z_u x_v - x_u z_v)\,du \wedge dv \\ & + f_3 \circ c \quad (x_u y_v - x_v y_u)\,du \wedge dv, \end{aligned}$$

was uns aus den Übungen irgendwie bekannt vorkommen sollte, denn

$$= (f \circ c) \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}\right) du \wedge dv$$

<u>Wir halten fest:</u>

$$\int_C f_1\,dy \wedge dz + f_2\,dz \wedge dx + f_3\,dx \wedge dy = \int_{Q^2} (f \circ c) \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}\right) du \wedge dv$$

und gemäß Def. 4.2 – wir haben jetzt eine 2-Form über $\mathbb{R}^2$ –

$$\boxed{\int_C f_1\,dy \wedge dz + f_2\,dz \wedge dx + f_3\,dx \wedge dy = \int_{Q^2} (f \circ c) \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v}\right) \underset{\text{bzw } d(u,v)}{\underline{\underline{du\,dv}}}} \qquad (+)$$

Nun brauchen wir nur noch die konkrete Form von $f_1, \dots, f_3$ einzusetzen, um zu erhalten:

$$\int_{Q^2} f(c(u,v)) \cdot \underbrace{c_u(u,v) \times c_v(u,v)}_{N(u,v)}\,du\,dv = \int_g \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot dr$$

bzw. – $N(u,v)$ wurde bereits in den Übungen definiert –

$$\boxed{\int_{Q^2} f(c(u,v)) \cdot N(u,v)\,du\,dv = \int_g \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot dr}$$

Dabei:
$$f = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

Bemerkungen 4.17.

(i) Natürlich funktioniert alles analog für Quader K an Stelle von Q^k (mit Transformation $[a_i; b_i] = \{a_i + t(b_i - a_i), t \in [0,1]\}$.)

(ii) Wir haben $c^*\eta$ "schulbuchmäßig" berechnet, um zu sehen, wie es gemäß der Theorie der Differentialformen funktioniert.
Sie wissen aus den Übungen, dass die Differentialschreibweise so suggestiv ist, dass man eigentlich nichts falsch machen kann. Natürlich rechnet man einfach so:

$$\text{z.B.} \quad f_1\, dy \wedge dz = f_1(c(u,v))\, dy(u,v) \wedge dz(u,v)$$

und dann weiter wie gehabt. Wir brauchen $c^*\eta$ so nicht mehr.

(iii) Trotzdem ist die bis jetzt erarbeitete Form des Satzes von Stokes noch nicht zufriedenstellend, denn

- Noch immer lässt sie sich nicht gut merken
- Sie gilt nur für zu simple Flächen.

Durch Einführung der Rotation werden wir dies im übernächsten Abschnitt beheben. Vorher aber behandeln wir den wohl wichtigsten Integralsatz, den Gaußschen Integralsatz.

(iv) Es gibt kleine geometrische Stolpersteine, die man aber geschickt umgehen kann. →

Beispiel 4.18 Integral über die obere Hälfte der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$

Zu integrieren sei

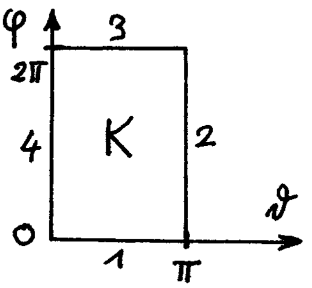
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow P \\ \leftarrow Q \\ \leftarrow R \end{array}$$

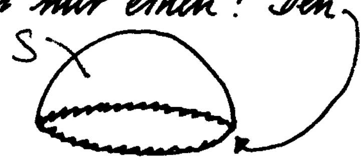
über die obere Hälfte von $S(0,1)$. Mit Kugelkoordinaten

(ϑ, φ) bekommen wir den Parameterbereich

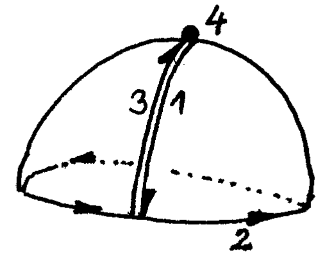
$$K = [0,\pi] \times [0,2\pi],$$

der 4 Randstücke hat. Der Bildbereich hat nur einen! Den



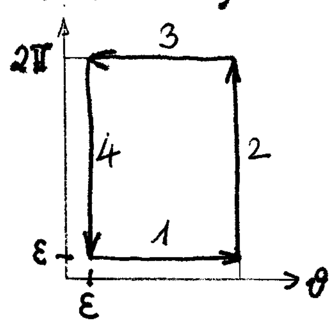


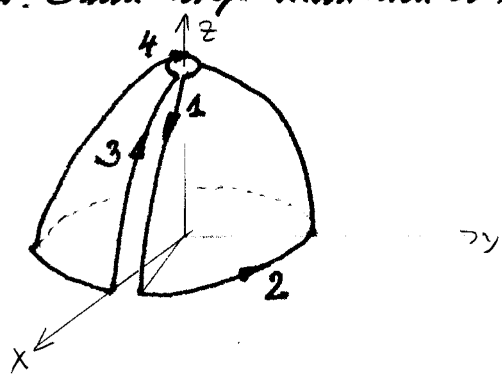
Was passiert hier? Wir verdeutlichen uns die Lage der Randstücken zu den Rändern von K!



Natürlich erwartet man, dass nur der "echte" Rand 2 eine Rolle spielt. Das ist in der Tat der Fall, weil 4 als Punkt keine Bedeutung haben kann und sich die Kurvenintegrale zu 1,3 wegen entgegengesetzter Orientierung aufheben.

Trotzdem bleiben noch Bedenken, denn in 4 bzw 1,3 gibt es Probleme mit der Injektivität. Dann hilft man sich so:





Man wendet den Satz von Stokes an und lässt danach $\varepsilon \downarrow 0$ streben.

<u>Kurzum:</u> Der Satz von Stokes funktioniert mit dem "echten" Rand. Das Beispiel aber rechnen wir nicht jetzt, sondern später, wenn wir die Rotation haben.