4.4.4. Der Gaußsche Integralsatz, Divergenz eines Vektorfelds

Wir betrachten jetzt den Fall $k = n = 3$ und Funktionen P, Q, R aus $C^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^3$ offen.

Die Differentialform ω sei folgende 2-Form:

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$$

Ihre äußere Ableitung berechnet sich sehr leicht:

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}\, \underbrace{dy \wedge dz \wedge dx}_{= dx \wedge dy \wedge dz} + \frac{\partial R}{\partial z}\, \underbrace{dz \wedge dx \wedge dy}_{= dx \wedge dy \wedge dz}$$

$$\boxed{d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz} \qquad \text{3-Form im } \mathbb{R}^3$$

Def. 4.19 Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt der Ausdruck

$$\boxed{\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

die Divergenz von f.

Im Falle $f = (P, Q, R)^T$ folgt dann

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

und somit $d\omega = \operatorname{div} f \; dx \wedge dy \wedge dz$.

Nun sei $c : Q^3 \to \mathbb{R}^3$ ein 3-dimensionales Flächenstück mit Rand ∂c, also ein durch Parameterdarstellung gegebener (im Fall der Nichtdegeneration) dreidimensionaler Körper, und f sei stetig diffbar.

Satz von Stokes $\Rightarrow \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \quad \Rightarrow$

Satz 4.20 (Gaußscher Integralsatz, Version 1) Unter den obigen Voraussetzungen an $f = (P, Q, R)^T$ und c gilt

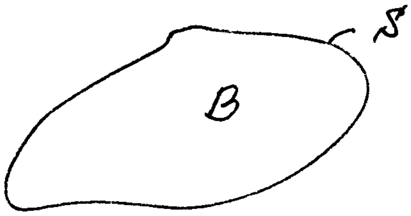
$$\boxed{\int_c \operatorname{div} f \; d(x, y, z) = \int_{\partial c} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy}$$

<u>Bemerkung</u>: Im $\mathbb{R}^k$ gilt $\int_K \omega \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int_K \omega \, dx$,

deshalb $d(x,y,z)$ für $dx \wedge dy \wedge dz$!

So ist der Gaußsche Satz noch unvollkommen. Das liegt daran, daß wir das Randintegral rechnerisch nicht in der Hand haben, jedenfalls nicht mit den vorhandenen Hilfsmitteln.

<u>Was vermuten wir?</u>



$B \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben mit "hinreichend glatter" Oberfläche S.

$f: B \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar.

Ist $g: Q^2 \to \mathbb{R}^3$ eine sinnvolle Parametrisierung von S (wir wollen annehmen, daß es eine solche gibt), dann (Formel (+) aus 4.4.3)

$$\int_{\partial c} P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy = \int_{Q^2} (f \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \, d(u,v).$$

Das rechts stehende Integral ist gerade das in den Übungen eingeführte Oberflächenintegral 2. Art (vektorielles K.I.):

$$= \int_{Q^2} (f \circ g) \cdot N(u,v) \, d \quad v = \int_{Q^2} (f \circ g) \cdot n(u,v) \underbrace{|N(u,v)| \, d(u,v)}_{\substack{d\sigma \\ \text{Oberflächenelement}}}$$

$$= \int_S f \cdot n \, d\sigma.$$

$\Rightarrow$ <u>Vermutung 4.21</u> Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $B \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand S und $f \in C^1(B)$

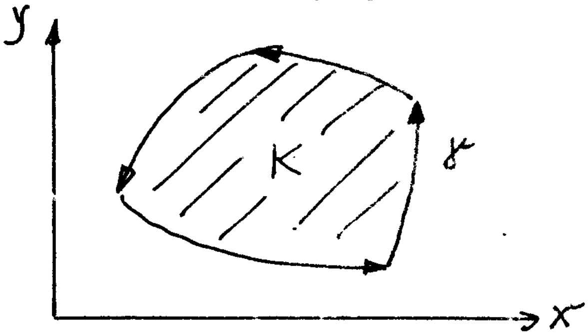
$$\boxed{\int_B \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_S f \cdot n \, d\sigma}$$

(Gaußscher Integralsatz, divergence theorem, Satz von Gauß-Ostrogradski ...)

4.4.5 Klassische Version des Satzes von Gauß im Raum

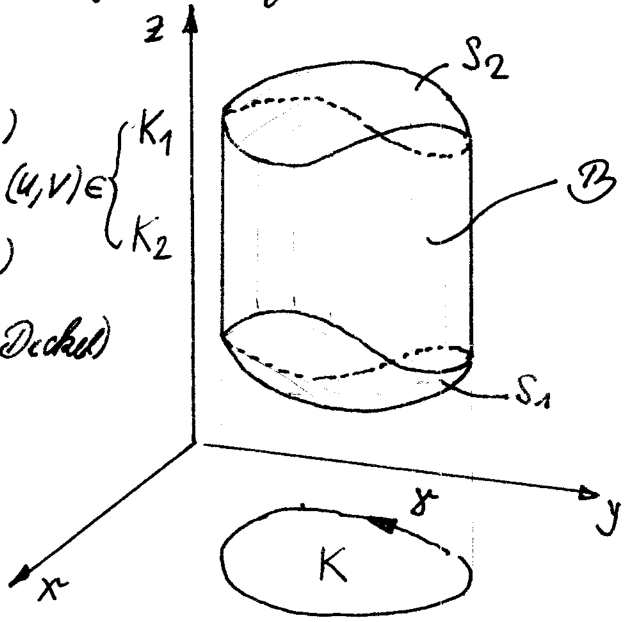
Wir behandeln hier einen wichtigen (und schon recht allgemeinen) Fall, in dem unsere Vermutung 4.21 richtig ist. Der Satz gilt in Normalbereichen $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^3$.

Dazu sei $K\subset\mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:



K sei eine einfach zusammenhängende Menge des $\mathbb{R}^2$, deren Rand durch eine einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ gebildet wird.

<u>$\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^3$ ist geometrisch wie folgt aufgebaut:</u>



- $S_1: \; r=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1(u,v)$
  $S_2: \; r=c_2(u,v)$
  $(u,v)\in\begin{cases}K_1\\K_2\end{cases}$

  (unterer und oberer Deckel)

- S_1, S_2 können wie folgt als Graphen einer Funktion von (x,y) darstellbar sein: Es existieren <u>stetige Funktionen</u> $\varphi_1,\varphi_2: K\to\mathbb{R}$ mit

$$z_i(u,v)=\varphi_i(x_i(u,v),y_i(u,v)) \qquad i=1,2$$

(beachte: $\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}=c_i(u,v),\ i=1,2.$)

Die Parameterbereiche K_1, K_2 seien kompakte Mengen des $\mathbb{R}^2$.

- Wir bezeichnen die ersten beiden Komponenten von c_1, c_2 mit g_1, g_2, d.h.

$$g_i(u,v) = \begin{pmatrix} x_i(u,v) \\ y_i(u,v) \end{pmatrix} \qquad i = 1,2.$$

Es soll gelten

$$g_1(K_1) = g_2(K_2) =: K,$$

wobei K die oben beschriebene Form hat.

<u>Def 4.22:</u> Die Menge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K,\ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y) \right\}$$

heißt <u>Normalbereich bezüglich der xy-Ebene</u>, wenn zusätzlich folgende Eigenschaften erfüllt sind:

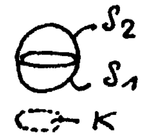
(i) c_i, $i = 1,2$, sind auf offenen, K_i umfassenden Mengen stetig differenzierbare Abbildungen in den $\mathbb{R}^3$.

(ii) Die Ränder $\partial K_1, \partial K_2$ sind Nullmengen des $\mathbb{R}^2$ und es gilt

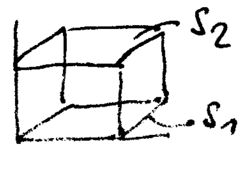
$$\det g_1'(u,v) < 0 \quad \forall (u,v) \in \mathring{K}_1$$
$$\det g_2'(u,v) > 0 \quad \forall (u,v) \in \mathring{K}_2$$

<u>Bemerkungen:</u> Wegen $\det g_i' \neq 0$ sind g_1, g_2 injektiv in $\mathring{K}_i$. Die "Deckel" S_1, S_2 haben zwei Darstellungen – erstens die Parameterdarstellung über c_1, c_2 und zweitens die explizite Darstellung $z = \varphi_i(x,y)$. Die erste sichert uns stetige Differenzierbarkeit bis an den Rand, die zweite das bequeme Arbeiten mit einer expliziten Flächendarstellung. Das zahlt sich z.B. bei der Kugel aus, deren obere bzw. untere Hälfte nicht durch eine explizite <u>und</u> stetig differenzierbare Darstellung zu fassen ist.

<u>Beispiele:</u> a) die Kugel im $\mathbb{R}^3$



b) achsenparallele Quader des $\mathbb{R}^3$



Satz 4.23 (Gaußscher Integralsatz im Raum) Ist $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich bezüglich aller 3 Koordinatenebenen und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer $\mathcal{B}$ umfassenden offenen Menge, so gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial\mathcal{B}} f \cdot n \, d\sigma,$$

wobei n die nach außen gerichtete Normale an $\partial\mathcal{B}$ ist.

Beweis: (i) Wir setzen wieder an Stelle von $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ $x \mathrel{\hat{=}} (x, y, z)^T$ sowie

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Es reicht aus, nur den Fall eines Normalbereiches bezüglich der xy-Ebene zu behandeln mit $P = Q = 0$.

Dann gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial R}{\partial z} \, d(x,y,z) = \int_K \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) d(x,y)$$

$$= \int_K R(x,y,\varphi_2(x,y))\, d(x,y) - \int_K R(x,y,\varphi_1(x,y))\, d(x,y).$$

Für das erste Integral folgt

$$\int_K R(x,y,\varphi_2(x,y))\, d(x,y) \underset{K = g_2(K_2)}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{K_2} R(\underbrace{g_2(u,v)}_{(x_2,y_2)(u,v)}, \underbrace{\varphi_2(g_2(u,v))}_{z_2(u,v)}) \underbrace{|\det g_2'|}_{=\det g_2'} \, d(u,v)$$

$$= \int_{K_2} R(C_2(u,v)) \frac{\partial(x_2,y_2)}{\partial(u,v)} \, d(u,v) \qquad (*)$$

$$= \int_{C_2} R \, dx \wedge dy$$

Dabei haben wir, wie bereits in der Übung,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

verwendet. Analog folgt für das zweite Integral wegen $|\det g_1'| = -\det g_1'$

$$\int_K R(x,y,\varphi_2(x,y))\, d(x,y) = -\int_{C_1} R\, dx\wedge dy$$

also
$$\int_B \frac{\partial R}{\partial z}\, d(x,y,z) = \int_{C_1} R\, dx\wedge dy + \int_{C_2} R\, dx\wedge dy.$$

Damit haben wir den oberen und unteren Deckel von B abgearbeitet. Es fehlt die senkrechte Mantelfläche: S_3.
K hat nach Voraussetzung die Randkurve γ

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}, \qquad a \le t \le b$$

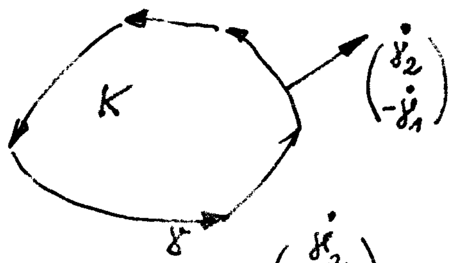
die stückweise glatt ist. Setzen

$$c_3(u,v) = \begin{pmatrix}\gamma_1(u)\\ \gamma_2(u)\\ v\end{pmatrix}, \quad K_3 = \left\{\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} : a \le u \le b,\ \varphi_1(\gamma(u)) \le v \le \varphi_2(\gamma(u))\right\}$$

Dann ist $S_3 = c_3(K_3)$ die senkrechte Mantelfläche. Da γ_1, γ_2 stückweise glatt sind, haben wir mit Ausnahme endlich vieler u-Werte

$$\dot\gamma(u) = \begin{pmatrix}\dot\gamma_1(u)\\ \dot\gamma_2(u)\end{pmatrix} \neq 0.$$

Damit
$$\frac{\partial c_3}{\partial u} \times \frac{\partial c_3}{\partial v} = \begin{pmatrix}\dot\gamma_2\\ -\dot\gamma_1\\ 0\end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall v, \text{ für alle } u \text{ mit Ausnahme endlich vieler.}$$

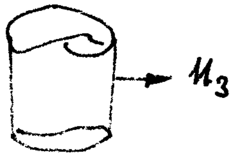


Wir wählen für den Normalenvektor an γ diesen Vektor, normiert. Dann zeigt er nach außen.

$$\Rightarrow \quad n = \begin{pmatrix}\dot\gamma_2\\ -\dot\gamma_1\\ 0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2}}$$

ist nach außen gerichteter Normalenvektor auf S_3. Er ist orthogonal zur z-Achse. Deshalb gilt

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ R\end{pmatrix} \cdot n_3 = 0 \quad \text{auf } S_3$$



mit Ausnahme einer Nullmenge, damit

$$\int_{S_3} \begin{pmatrix}0\\ 0\\ R\end{pmatrix} \cdot n\, d\sigma = 0.$$

Im Übrigen gilt auf S_3

$$\frac{\partial(x_3,y_3)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_{3u} & y_{3u} \\ x_{3v} & y_{3v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot\gamma_1 & \dot\gamma_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so dass wir alle drei Integrale zusammenfassen können zu

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial R}{\partial z}\, d(x,y,z) = \int_{K_1} R(c_1)\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(u,v)}\, d(u,v) + \int_{K_2} R(c_2)\frac{\partial(x_2,y_2)}{\partial(u,v)}\, d(u,v)$$

↑ analog zu (*)

(*)

$$+ \int_{K_3} R(c_3)\frac{\partial(x_3,y_3)}{\partial(u,v)}\, d(u,v)$$

↖ Addition einer Null

$$= \int_{K_1\cup K_2\cup K_3} R(c)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, d(u,v),$$

wenn man c entsprechend aus c_1, c_2, c_3 zusammensetzt.

$$= \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\, d(u,v)$$

, N siehe S. 151 bzw. S. 155

$$= \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \cdot n(u,v)\, \underbrace{|N(u,v)|\, d(u,v)}_{d\sigma}$$

$$= \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \cdot n\, d\sigma.$$

(ii) Bezüglich der anderen Funktionen P, Q verfahren wir analog, weil $\mathcal{B}$ auch Normalbereich bezüglich der anderen Ebenen ist. Insgesamt:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} f\, d(x,y,z) = \int_S \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot n\, d\sigma = \int_S f\cdot n\, d\sigma.$$

Es bleibt zu bemerken, dass auf S_1, S_2, S_3 der oben definierte Normalenvektor $n = \frac{c_u \times c_v}{|c_u \times c_v|}$ immer nach außen zeigt! □

Bsp 4.24 Berechnung der Kugeloberfläche aus dem Kugelvolumen.

Wir wissen, dass die Kugel vom Radius r im $\mathbb{R}^3$ das Volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

besitzt. Über den Satz von Gauß berechnen wir deren Oberfläche sehr einfach wie folgt:

Wählen $f = (x, y, z)^T \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{div} f = (1+1+1)\cdot\frac{1}{3} = 1$

$$\Rightarrow \int_{B(0,r)} \operatorname{div} f \, d(x,y,z) = \int_{B(0,r)} d(x,y,z) = V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Satz von Gauß $\Rightarrow$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \int_{S(0,r)} f \cdot n \, d\sigma = \int_{S(0,r)} f \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|} \, d\sigma$$

$$= \int_{S(0,r)} \frac{1}{3} \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|^2 \cdot \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|} \, d\sigma = \frac{1}{3} \int_{S(0,r)} r \, d\sigma = r \cdot O \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{O = 4\pi r^2.}} \qquad \#$$

Wir werden später noch den Gaußschen Integralsatz der Ebene herleiten und anwenden. Vorher aber kehren wir zum Stokesschen Satz zurück.