4.4.6 Die klassische Variante des Satzes von Stokes im $\mathbb{R}^3$

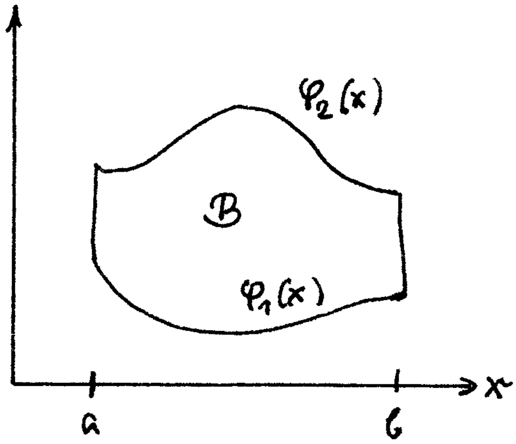
Wir folgen hier, wie im letzten Abschnitt, Heuser, Lehrbuch der Analysis, Band 2.

<u>Def. 4.25</u> Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$\mathcal{B} = \left\{ \binom{x}{y} : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\}$$

mit stetigen Funktionen $\quad : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation heißt <u>BV-Normalbereich bezüglich der x-Achse</u>.

<u>Bemerkung:</u> Lipschitz-stetige oder stetig diffbare Funktionen sind von beschränkter Variation. Wer den Begriff von Fkt. beschr. Variation nicht kennt, gehe also von $\varphi_i \in C^1[a,b]$ aus.



Analog definiert man BV-Bereiche bezüglich der y-Achse.

<u>Def 4.26</u> (<u>Rotation</u>) Es sei $f = (P, Q, R)^T$ ein differenzierbares Vektorfeld. Den Ausdruck

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

englischsprachiger Raum: curl f

nennt man die <u>Rotation von f</u>.

Das bringt uns nicht viel weiter, denn noch immer ist das schwierig einzuprägen

<u>Def 4.27</u> (<u>Nabla-Operator</u>) Den formal vektoriell geschriebenen Differentialoperator

$$\nabla := \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$$

nennt man <u>Nabla-Operator</u>.

Mit ∇ ist es viel einfacher, die Rotation zu bestimmen, denn es gilt

$$\boxed{\operatorname{rot} f = \nabla \times f}$$

Wie ist das zu verstehen? ∇ wird formal wie ein "richtiger" Vektor des $\mathbb{R}^3$ verwendet. Dann

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ D_x & D_y & D_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i\,(D_y R - D_z Q) - j\,(D_x R - D_z P) + k\,(D_x Q - D_y P)$$

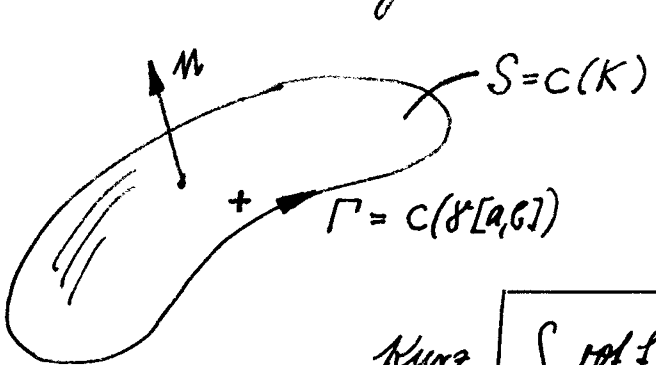
$$= \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix} = \operatorname{rot} f.$$

Satz 4.28 (Stokesscher Integralsatz) Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein BV-Normalbereich bezüglich beider Achsen und $c : K \to \mathbb{R}^2$ eine Fläche, die zweimal stetig differenzierbar ist.*) Der Rand ∂K sei durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert und positiv orientiert.

Das Vektorfeld f sei stetig differenzierbar auf einer die Spur $C(K)$ umfassenden offenen Menge. Dann gilt

$$\boxed{\int_C \operatorname{rot} f \cdot n \, d\sigma = \int_{c\circ\gamma} f \cdot dx,}$$

wenn n verträglich mit $c\circ\gamma$ orientiert ist.



Kurz $$\boxed{\int_S \operatorname{rot} f \cdot n \, d\sigma = \int_\Gamma f \cdot dx}$$

---

*) Im Sinne von Def. 4.1

Beweis: Wir verzichten auf eine Angabe des Beweises, der bei Heuser ausgeführt ist. Die Aussage folgt im Prinzip aus Abschnitt 4.4.3 (Satz 4.16 + Ausführungen zur Berechnung der Integrale). Nur die genaue Darstellung der Ränder ist hier etwas anders. $\square$

Bemerkung: Wählt man $n = \frac{c_u \times c_v}{|c_u \times c_v|}$, dann ist die Verträglichkeit von n mit der Randorientierung gesichert.

Bsp. 4.29 Fortsetzung von Bsp. 4.18

Zu berechnen war

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma .$$

S = Obere Hälfte der Einheitssphäre

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

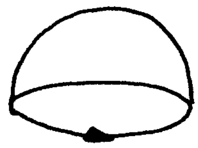
a) Über den Satz von Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_\gamma F \cdot dr \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wobei γ den positiv orientierten Einheitskreis parametrisiert.

$$\gamma: \quad x = \cos\varphi, \; y = \sin\varphi, \; z = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$dr = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$



$$F(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \underline{\underline{0.}}$$

b) Ohne den Satz von Stokes:

Wir erhalten $\quad \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

$$n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ wegen } R = 1$$

$$d\sigma = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

siehe Übg.

$z = \cos\vartheta$
$y = \sin\vartheta \sin$

$$\Rightarrow \int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\sigma = \int_S z^2 - y^2 \, d\sigma$$

$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\underbrace{\cos^2\vartheta}_{1-\sin^2\vartheta} - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi) \sin\vartheta \, d \; d$$

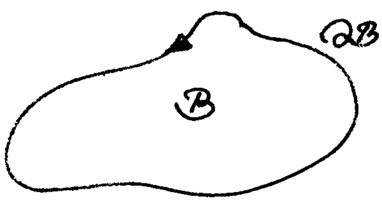
$$= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta - \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^3\vartheta \sin^2\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta}_{=0} \int_0^{2\pi} d\varphi - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta}_{=0} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = 0 .$$

(Sinus ist ungerade)

4.4.7 Der Gaußsche Integralsatz der Ebene

Wir betrachten nun einen ebenen Bereich $\mathcal{B}$ mit Rand $\partial\mathcal{B}$



und die Differentialform

$$\boxed{\omega = P\,dx + Q\,dy}$$

mit $P, Q : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$.

Eine formale Rechnung ergibt

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Wenn also $\mathcal{B}$ und $\partial\mathcal{B}$ "vernünftig" gewählt sind und $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ stetig, dann sollte gelten.

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial\mathcal{B}} P\,dx + Q\,dy}$$

Gaußscher Integralsatz der Ebene
(auch Greenscher Satz)

Und das gilt in der Tat, wenn ∂B nicht "zu wild" ist.

Satz 4.30 (Gaußscher Integralsatz der Ebene)

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein BV-Normalbereich bezüglich beider Achsen und die ∂B parametrisierende stückweise glatte Kurve sei positiv orientiert. P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial y}$ seien stetig auf einer B umfassenden offenen Menge. Dann gilt

$$\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial B} P\,dx + Q\,dy$$

Beweis: Sparen wir ein. Siehe Heuser, Analysis, Bd. 2. ($\square$)

Statt dessen leiten wir folgenden schönen Inhaltssatz her:

Satz 4.31 Unter den obigen Voraussetzungen an B gilt für den Flächeninhalt $|B|$

$$\boxed{|B| = \frac{1}{2} \int_{\partial B} x\,dy - y\,dx}$$

Beweis: Setze $Q = x$, $P = -y$ $\Rightarrow$

$$\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \underbrace{\int_B 2\, d(x,y)}_{= 2|B|} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial B} x\,dy - y\,dx$$

Daraus folgt sofort die Formel. $\square$

Die beiden letzten Sätze bleiben unter viel schwächeren Voraussetzungen richtig. Es reicht, daß B beschränkt ist und von einer rektifizierbaren Jordankurve umschlossen wird.

4.4.8 Partielle Integration und Greensche Formeln

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Formeln gehören zum wichtigsten Handwerkszeug beim Umgang mit partiellen Differentialgleichungen. Wir stellen sie im Raum $\mathbb{R}^3$ dar. Sie bleiben aber für beliebige Raumdimension gültig, denn auch der Gaußsche Satz kann für beliebige Raumdimension aufgeschrieben werden. Aus diesem folgen alle unsere Formeln.

> Im Weiteren sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich, in dem der Gaußsche Integralsatz richtig ist.

(i) Formel der partiellen Integration

$u, v : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar, n die äußere Normale an $\partial\mathcal{B}$. Dann gilt für alle $i \in \{1,2,3\}$

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\mathcal{B}} u\, v\, n_i\, d\sigma - \int_{\mathcal{B}} v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx}$$

n_i : i-te Komponente von n

Beweis: Setze $f = (0, \dots, 0, \underbrace{uv}_{i\text{-te Komp.}}, 0 \dots 0)^T$

Dann gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} f\, dx = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\, dx = \int_{\partial\mathcal{B}} f \cdot n\, d\sigma \quad \text{(Gauß)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx = \int_{\partial\mathcal{B}} u\, v\, n_i\, d\sigma$$

und deshalb die Formel. □

(ii) Erste Greensche Formel

Ist u einmal und v zweimal stetig diffbar in $\mathcal{B}$, dann gilt

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} u\, \Delta v\, dx = \int_{\partial\mathcal{B}} u \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - \int_{\mathcal{B}} \nabla u \cdot \nabla v\, dx.}$$

Beweis: Setze $f = u\nabla v$ und wende den Satz von Gauß an

Berechnung von $\operatorname{div}(u\nabla v)$: Wir erhalten

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\,\Delta v. \qquad (*)$$ H.A.

Somit

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(u\nabla v)\,dx = \int_{\partial\mathcal{B}} (u\nabla v)\cdot n\, d\sigma \qquad \text{(Gauß)}$$

$$(*) \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{B}} \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\mathcal{B}} u\,\Delta v\,dx = \int_{\partial\mathcal{B}} u\,\underbrace{(\nabla v\cdot n)}_{=\frac{\partial v}{\partial n}}\,d\sigma \qquad \square$$

(iii) Zweite Greensche Formel

Sind u, v beide zweimal stetig differenzierbar in $\mathcal{B}$, dann gilt

$$\int_{\mathcal{B}} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx = \int_{\partial\mathcal{B}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der ersten Greenschen Formel, weil der Term $0 = \int_{\mathcal{B}} \nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_{\mathcal{B}} \nabla v\cdot\nabla u\,dx$ wegfällt. $\square$

Eine Anwendung: Schwache Formulierung der stationären Wärmeleitungsgleichung.

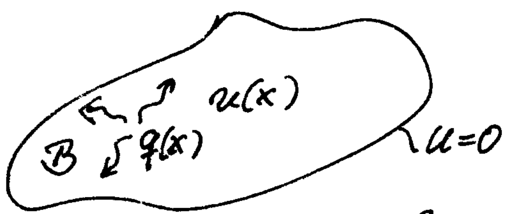
Betrachten die Gleichung (Randwertproblem)

Poisson-Gleichung
$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= q \quad \text{in } \mathring{\mathcal{B}} \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B} \end{aligned}}$$

$q : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ "Temperaturquellendichte"

$u : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ Temperatur in $\mathcal{B}$

Randtemperatur 0



ausgeschrieben: $-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = q$

Eine Lösung u dieser Gleichung sollte die angegebenen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. Durch einen wichtigen Trick merkt man, dass man nur die Ableitungen erster Ordnung braucht:

$$-\Delta u = q \quad \Big| \cdot v \,, \int_B \qquad (*)$$

Multipliziere mit $v \in C^1(B)$, danach Integration

$$-\int_B v \, \Delta u \, dx = \int_B q \, v \, dx \quad \forall v \in C^1(B)$$

$$-\int_{\partial B} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma + \int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_B q \, v \, dx \quad \forall v \in C^1(B).$$

Wir fordern nun noch $v = 0$ auf ∂B. Dann $(*) \Rightarrow$

$$\boxed{\int_B \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_B q \, v \, dx \quad \forall v \in C^1(B) \text{ mit } v\big|_{\partial B} = 0.} \qquad (**)$$

Schwache oder Variationsformulierung der Wärmeleitgleichung.

Erfüllt u außerdem die Randbedingung $u\big|_{\partial B} = 0$, dann folgt aus $(**)$ die Poisson-Gleichung mit Randbedingung.

Die Variationsformulierung $(**)$ ist grundlegend für die Theorie (schwache Lösungen) und die Numerik (Methode der finiten Elemente, FEM).