Offenbar:
- Sind alle E_k kompakt (und Elementarmengen)
- $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \cdots$
- E_n ist Vereinigung von 2^n Intervallen der Länge 3^{-n}

Die Menge
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$
ist kompakt und nach unseren Sätzen über kompakte Mengen nichtleer.

Offenbar gilt für den elementargeometrischen Inhalt λ
$$\lambda(E_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(E_n)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n=1,2,\ldots$$
Deshalb folgt für das äußere Maß $\lambda^*(A)$ [man beachte, dass jede Menge E_n die Menge A überdeckt]
$$\lambda^*(A) \le \inf_n \lambda(E_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$
Das Cantorsche Diskontinuum hat das äußere Maß Null.
Es ist natürlich auch klar, dass diese Menge endlich messbar ist.

<u>Äquivalenz von Mengen</u> Ein entscheidender Kunstgriff in der Maßtheorie ist der folgende: A, B seien endlich messbar, d.h. $\mu^*(A) < \infty$ und $\mu^*(B) < \infty$, und es gelte
$$d(A,B) = 0.$$
Dann betrachtet man A und B als äquivalent, d.h., A und B gehören zur gleichen Äquivalenzklasse.

<u>Beispiel</u>: Das Cantorsche Diskontinuum und die leere Menge sind äquivalent, denn
$$d(A,\emptyset) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{schon auf S.15} \\ \text{erläutert}}}{=} \mu^*(A) = 0.$$
Das gilt, obwohl das Cantorsche Diskontinuum keine isolierten Punkte enthält, wie man zeigt.

Satz 1.22 Die Mengen $A_i \in \mathfrak{M}(\mu)$ seien paarweise disjunkt. Dann gilt
$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k).$$

Beweis: Wegen der bereits bewiesenen Subadditivität von μ^* gilt hier schon "$\le$". Umgekehrt gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^n \mu^*(A_k) = \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) \le \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big).$$

μ^* ist additiv auf $\mathfrak{M}(\mu)$ und $\bigcup_1^n A_k \in \mathfrak{M}$. □

Als abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen können messbare Mengen eine sehr komplizierte Struktur haben. Daher ist die folgende Aussage hilfreich:

Satz 1.23 Ist $A \subset \mathbb{R}$ messbar und $\mu^*(A) < \infty$, dann ist A auch endlich messbar.

Beweis Wir haben
$$A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \quad , \quad A_k \in \mathfrak{M}(\mu)\ \forall k$$
$$\Rightarrow \ A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k' \quad \text{mit} \quad A_1' = A_1, \quad A_k' = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$$
wobei alle A_k' paarweise disjunkt sind.
Weil $\mathfrak{M}$ nach Satz 1.20 ein Ring ist, sind auch alle A_k' in $\mathfrak{M}(\mu)$, also endlich messbar. Gleiches gilt für
$$B_n = A_1' \cup \ldots \cup A_n'.$$
Letzter Satz $\Rightarrow$
$$d(A, B_n) = \mu^*(A \setminus B_n) = \mu^*\Big(\bigcup_{k=n+1}^\infty A_k'\Big) \overset{(\text{Satz } 1.22)}{=} \sum_{k=n+1}^\infty \mu^*(A_k')$$
Daher ist $d(A, B_n)$ ein Reihenrest, der gegen Null strebt, wenn die Reihe konvergiert. Es gilt aber
$$\sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k') \underset{\text{Satz } 1.22}{=} \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k'\Big) = \mu^*(A) < \infty,$$

also Konvergenz. Damit

$$d(A, B_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Andererseits sind alle B_n aus $\mathfrak{M}(\mu)$, somit existieren Elementarmengen E_m mit

$$d(B_n, E_m) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Insbesondere finden wir ein $m(n)$ mit $d(B_n, \underbrace{E_{m(n)}}_{E_n'}) < 2^{-n}$

$$\Rightarrow \quad d(B_n, E_n') \to 0, \quad n \to \infty.$$

Schließlich

$$d(A, E_n) \le \underbrace{d(A, B_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(B_n, E_n)}_{\to 0} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Somit ist A endlich messbar. $\square$

Der folgende Satz löst nun – bis auf eine Feinheit, die dann noch eine Menge Arbeit machen wird – das Maßproblem. Unser äußeres Maß ist nämlich auf der richtigen Menge ein Maß.

Satz 1.24 Es sei $\mathcal{A}$ (genauer $\mathcal{A}(\mu)$) die Menge aller (bezüglich μ) messbaren Teilmengen von Ω. $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra und das äußere Maß μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{A}$.

Beweis a) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra

Zu zeigen ist: $\Omega \in \mathcal{A}$ und $A_k \in \mathcal{A} \; \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_k \in \mathcal{A}$ sowie: $\mathcal{A}$ ist Ring ($\mathcal{A}$ ist σ-Ring)

- Sei $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ mit $A_k \in \mathcal{A} \; \forall k$.
  Für die A_k selbst wissen wir $A_k = \bigcup_{l=1}^\infty \underbrace{A_{kl}}_{\text{endl. messbar}}$

$\Rightarrow$ Damit ist

$$A = \bigcup_{k,l}^\infty A_{kl}$$

abzählbare Vereinigung endl. messbarer Mengen (Cantorsches Diagonalargument) $\Rightarrow A \in \mathcal{A}$.

- <u>Ringeigenschaften</u> Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Zu zeigen: $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$$

alle $A_k, B_l \in \mathfrak{M}(\mu)$. Dass $A \cup B$ in $\mathcal{A}$ liegt, ist trivial.
Betrachten wir $A \setminus B$:

$$A_k \cap B = A_k \cap \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l = \bigcup_{l=1}^{\infty} \underbrace{(A_k \cap B_l)}_{\in \mathfrak{M}(\mu)} \Rightarrow A_k \cap B \text{ messbar.}$$

$$\mu^*(A_k \cap B) \leq \mu^*(A_k) < \infty \quad \forall k$$

$\Rightarrow$ sogar endlich messbar (Satz 1.23)

$$\Rightarrow A_k \setminus B = \underbrace{A_k}_{\text{endl. messb.}} \setminus \underbrace{(A_k \cap B)}_{\text{endl. messb.}} \text{ endlich messbar} \quad (\mathfrak{M}(\mu) \text{ ist Ring})$$

$$\Rightarrow \quad A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_k \setminus B)}_{\text{endl. messb.}} \text{ endlich messbar.} \quad \checkmark$$

- <u>σ-Additivität von μ^*</u>

Zu zeigen: $\quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \qquad (*)$$

Weil sich alle A_k selbst als abzählbare Vereinigung in disjunkte endlich messbare Mengen zerlegen lassen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass alle A_k endlich messbar sind. Dann liefert aber Satz 1.22 sofort $(*)$. $\square$

<u>Def. 1.25</u> (Vollständigkeit) Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Teilmenge einer Menge vom Maß Null zu $\mathcal{A}$ gehört und damit selbst das Maß Null hat.

Mengen vom Maß Null heißen <u>Nullmengen</u>.

Ist μ vollständig, dann heißt auch der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig.

Das äußere Maß μ^* ist vollständig! Das sieht man wie folgt ein:

Sei $N \in \mathcal{A}$ und $\mu^*(N) = 0$ sowie $\tilde{N} \subset N$. Dann gilt $\mu^*(\tilde{N}) = 0$ und $\tilde{N} \in \mathcal{A}$. Denn: Für jede Elementarmenge E folgt

$$d(\tilde{N},E) \le d(\tilde{N},N) + d(N,E) = \mu^*(N \setminus \tilde{N}) + d(N,E)$$
$$\le \underbrace{\mu^*(N)}_{=0} + d(N,E) = d(N,E).$$

Wegen $N \in \mathcal{A}$ existiert Folge (E_n) mit $d(N,E_n) \to 0, n \to \infty$; alle E_n Elementarmengen.

$$\Rightarrow \quad d(\tilde{N},E_n) \to 0 \quad \Rightarrow \tilde{N} \text{ ist messbar.}$$

Klar ist $\mu^*(\tilde{N}) \le \mu^*(N) \quad \Rightarrow \mu^*(\tilde{N}) = 0$ $\square$

Das äußere Maß μ^* ist auf ganz $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ definiert. Aus dem bisher Bewiesenen folgt insbesondere:

<u>Korollar:</u> Die Einschränkung des äußeren Maßes auf die von den Elementarmengen erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ist ein Maß.

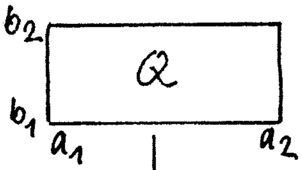
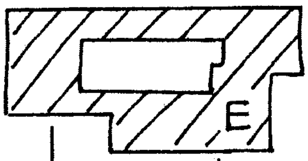
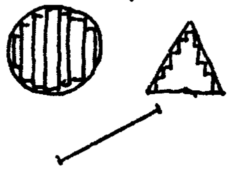
<u>Spezialfall</u> Das für $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$ auf diese Weise erzeugte äußere Maß λ^* ist ein Maß auf der Menge der Borelschen Mengen und ergibt für Mengen aus $\mathcal{F}^d$ (elementargeometr. Figuren) deren Inhalt. <u>Lebesgue-Borelsches Maß</u>

Wir werden zeigen, dass, ausgehend vom elementargeometr. Inhalt, das Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ der messbaren Mengen eindeutig bestimmt ist. Daher ist es berechtigt, schon jetzt zu definieren:

<u>Def 1.26</u> Es sei $\mathcal{A}$ die durch λ^* erzeugte σ-Algebra der messbaren Mengen. Die Mengen aus $\mathcal{A}$ heißen <u>Lebesgue-messbar</u>. Die Restriktion von λ^* auf $\mathcal{A}$ heißt <u>Lebesgue-Maß</u>. Wir setzen im Weiteren

$$\lambda := \lambda^*|_{\mathcal{A}}$$ bzw. λ^d, um die Dimension von $\mathbb{R}^d$ anzugeben.

Übersicht Lebesgue-Maß λ $(\Omega = \mathbb{R}^2)$

Mengen	Ringe / Algebren	Inhalte / Maße
Quader 		$\lambda(Q) = (a_2-a_1)(b_2-b_1)$ Inhalt
$\cup, \cap, \setminus$		
	$\mathcal{F}^2$ (Figuren) ist Ring	$\lambda(E)$ ist Prämaß
$\bigcup\limits_1^\infty, \bigcap\limits_1^\infty$ 	σ-Algebra $\mathfrak{B}$ der Borelmengen (kleinster Ring, der alle offenen Mengen enthält)	$\lambda^*/_{\mathfrak{B}}$ Lebesgue-Borelsches Maß
$d(A,E_n) \to 0$, $\lambda^*(A) < \infty$	Endl. messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^2$; liegen nicht notw. in $\mathfrak{B}$ Ring $\mathfrak{M}(\lambda)$	
$\bigcup\limits_1^\infty A_k$, $A_k \in \mathfrak{M}(\lambda)$ messbare Mengen	σ-Algebra $\mathcal{A}$ der messbaren Mengen (Lebesgue-messb. Mengen)	$\lambda := \lambda^*$ Lebesgue-Maß
$\mathcal{P}(\Omega)$	Potenzmenge, größte σ-Algebra auf Ω	λ^* äußeres Maß