Bemerkungen

(i) Da jede Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge ist, können solche Mengen sehr irregulär sein. Daher sind Lebesgue-messbare Mengen i.a. keine Borelschen Mengen.

(ii) Durch "Vervollständigung" des Lebesgue-Borelschen Maßes kommt man zum Lebesgue-Maß. Bauer, §5, §8 — Siehe dazu auch Übg 2

Grundidee: Man betrachtet alle Mengen $\tilde{A}$ der Form $\tilde{A} = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{B}$ und $\overset{*}{\lambda}(N) = 0$. Bauer, §5

Wir kehren zurück zum allgemeinen Maß $\mu$ und wollen klären, ob es eindeutig festgelegt ist.
Dazu verwenden wir

## Dynkin-Systeme

**Def. 1.27** Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) Für jede Folge $(A_k)$ paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$

Offenbar ist $\mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System, auch jede $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist es. Auch der Durchschnitt beliebig vieler Dynkin-Systeme ist ein Dynkin-System.
Aber ein Dynkin-System ist nicht notwendig eine $\sigma$-Algebra.

$\Rightarrow$ Für jede Teilmenge $\mathcal{E}$ aus $\mathcal{P}(\Omega)$ gibt es (Durchschnittsbildung!) ein kleinstes diese Menge enthaltendes Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System.

Wir nennen im Weiteren eine Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ durchschnittsstabil, wenn gilt

$$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$$

<u>Satz 1.28</u> Ein durchschnittsstabiles Dynkinsystem ist auch eine $\sigma$-Algebra.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{D}$ Dynkin-System und $A, B \in \mathcal{D}$. Was fehlt zur $\sigma$-Algebra:

- <u>Differenzbildung</u>

$$A \setminus B = A \cap \underbrace{(\Omega \setminus B)}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D} \qquad \checkmark$$

- <u>Abzählbare Vereinigung</u> nicht notw. disjunkter Mengen $A_k \in \mathcal{D}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k' \qquad \text{mit } A_1' = A_1$$

$$A_k' = A_k \setminus (A_1' \cup \ldots \cup A_{k-1}') \quad k \geq 2$$

paarweise disjunkt aus $\mathcal{D}$ (unser alter Trick)

$$\Rightarrow \bigcup_{1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}. \qquad \square$$

<u>Satz 1.29</u> Das von einer durchschnittsstabilen Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist eine $\sigma$-Algebra, nämlich $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

<u>Beweis:</u>
- Jede $\sigma$-Algebra ist Dynkin-System, also folgt zuerst $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Wüssten wir bereits, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine $\sigma$-Algebra ist, dann gälte $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$, woraus $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ folgt.

  Es <u>bleibt zu zeigen:</u> $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist $\sigma$-Algebra. Nach Satz 1.28 ist dazu nur die <u>Durchschnittsstabilität</u> zu zeigen:

- Für beliebiges $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ setzen wir

$$\mathcal{D}_D := \{ Q \in \mathcal{P}(\Omega) : Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \}.$$

Wir zeigen am Ende noch (relativ leicht), dass $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System ist. Zeigen wir nun, dass für jedes $D \in \mathcal{D}$ gilt

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D} \qquad (*)$$

dann sind wir fertig. Das heißt nämlich $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in \mathcal{D}_D$ und damit $A \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, also $\cap$-Stabilität.

Nun: Für jedes $E \in \mathcal{E}$ gilt
$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$$
(denn $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil und damit gilt $Q \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\forall Q \in \mathcal{E}$).
Folglich
$$\underbrace{\mathcal{D}(\mathcal{E})}_{\substack{\text{kleinstes von } \mathcal{E} \\ \text{erzeugtes Dynkin-} \\ \text{System}}} \subset \underbrace{\mathcal{D}_E}_{\substack{\text{ein Dynkinsystem, das} \\ \mathcal{E} \text{ enthält.}}}$$

Also: $\forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und $\forall E \in \mathcal{E}$ gilt $E \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$
Nach Def. von $\mathcal{D}_D$ folgt daraus
$$\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$$
und somit
$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D \quad \forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$
was (*) zeigt. Wie oben diskutiert, folgt daraus $\cap$-Stabilität.

- <u>Nachreichung der Dynkin-Eigenschaft</u> von $\mathcal{D}_D$ für jedes $D$

Sei $A \in \mathcal{D}_D$. Dann gilt für das Komplement ${}^cA := \Omega \setminus A$
$$^cA \cap D = (^cA \cap D) \cup (\underbrace{^cD \cap D}_{\emptyset})$$
$$= (^cA \cup {}^cD) \cap D = {}^c(A \cap D) \cap D$$
$$= {}^c(\underbrace{(A \cap D)}_{\in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \cup \underbrace{^cD}_{\text{auch}}) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

$\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil und Komplementbildung führt nicht heraus.

Somit gilt auch $^cA \in \mathcal{D}_D$.
Ist $(A_k)$ Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{D}_D$, dann
$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_k \cap D)}_{\substack{\in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ nach} \\ \text{Def. von } \mathcal{D}_D}} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$$

folglich auch $\bigcup_1^{\infty} A_k \in \mathcal{D}_D$. $\square$

Entscheidend für die Eindeutigkeit der Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen ist der folgende

<u>Satz 1.30</u> Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem, das $\mathfrak{X}$ ausschöpft, d.h.

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad , \quad \begin{matrix} E_k \subset E_{k+1} \ \forall k \\ E_k \in \mathcal{E} \ \forall k , \end{matrix}$$

und $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ sei die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra.
Stimmen zwei Maße $\mu_1$ und $\mu_2$ auf $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ in ganz $\mathcal{E}$ überein,

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \ \forall E \in \mathcal{E},$$

dann auch auf ganz $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

<u>Beweis</u>: Wir fixieren zunächst ein $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_i(E) < \infty$ $i = 1,2$.
Betrachten das System von Mengen

$$\mathcal{D}_E := \{ A \in \mathcal{A} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \} \qquad (\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E}$$

$\mathcal{D}_E$ ist ein Dynkin-System. z.B.

<u>$A \in \mathcal{D}_E \Rightarrow \underbrace{\mathfrak{X} \setminus A}_{^cA} \in \mathcal{D}_E$:</u> Zu zeigen ist $\mu_1(^cA \cap E) = \mu_2(\ldots)$

$$\mu_1(^cA \cap E) + \mu_1(A \cap E) \underset{\text{addit.}}{=} \mu_1(\underbrace{(^cA \cap E) \cup (A \cap E)}_{E}) = \mu_1(E)$$
$$= \mu_2(E) \quad \text{nach Vorauss.}$$
$$= \mu_2(^cA \cap E) + \mu_2(A \cap E).$$

Wegen $A \in \mathcal{D}_E$ folgt daraus sofort

$$\mu_1(^cA \cap E) = \mu_2(^cA \cap E)$$

und somit auch $^cA \in \mathcal{D}_E$.

Ähnlich zeigt man die andere Dynkin-Eigenschaft.

Offenbar gehören alle $A \in \mathcal{E}$ zu $\mathcal{D}_E$, denn $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil ($A \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap E \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$).

$$\Rightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E \qquad \Rightarrow \mathcal{D}_E \subset \underbrace{\mathcal{D}(\mathcal{E})}_{\substack{\text{kleinstes } \mathcal{E} \text{ umfassendes Dynkinsys.,} \\ \text{von } \mathcal{E} \text{ erzeugt.}}}$$

Nach Satz 1.28 ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ schon eine $\sigma$-Algebra. Andererseits ist $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ die kleinste von $\mathcal{E}$ erzeugte. Somit

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

Daraus folgt
$$\mathcal{D}_E = \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

Wir können also in der $\mathcal{D}_E$ definierenden Beziehung alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ einsetzen,

$$\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

Nun wollen wir auf die Voraussetzung $\mu_i(E) < \infty$, $i = 1, 2$ verzichten. Nach Voraussetzung gilt

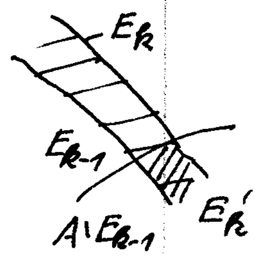
$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

mit einer aufsteigenden Folge $(E_k)$. Wie schon oft setzen wir

$$E_1' = E_1, \quad E_k' = E_k \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{k-1}), \; k \geq 2.$$

<u>Für $k \geq 2$:</u>

$$\mu_1(A \cap E_k') = \mu_1\big((\underbrace{A \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{k-1})}_{\in \mathcal{E}}) \cap \underbrace{E_k}_{\in \mathcal{E}}\big)$$




$$= \mu_2(\ldots) = \mu_2(A \cap E_k')$$

für jedes $A \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Außerdem $\mu_1(A \cap E_1') = \mu_2(A \cap E_1')$ wegen $E_1' = E_1$.
Die $E_k'$ bilden eine disjunkte Überdeckung von $\Omega$. Somit

$$\mu_1(A) = \mu_1\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k')\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-Additivität} \\ \text{u. Disjunktheit}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A \cap E_k')$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen des ersten Teils} \\ \text{des Beweises}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(A \cap E_k') = \mu_2(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

$\square$