Damit haben wir die noch offene Frage der Eindeutigkeit der Fortsetzung von Prämaßen geklärt.

<u>Folgerungen 1.31</u>

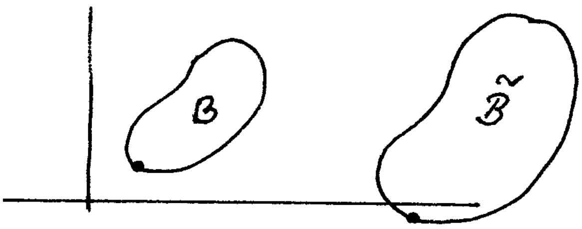
(i) Die Fortsetzung eines auf einem Ring $\mathcal{R}$ gegebenen Prämaßes zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra ist eindeutig bestimmt.

(ii) Ein Maß auf der σ-Algebra der Borelmengen ist schon durch seine Werte auf allen achsenparallelen Quadern festgelegt.

<u>Beweis:</u> (i) Man nehme $\mathcal{E} := \mathcal{F}^d$ (elementargeom. Figuren)

(ii) Der Inhalt von Figuren war aber schon durch den der erzeugenden Quader bestimmt. $\square$

Verändert sich das Maß einer Borelmenge durch Verschiebung? Nein! (Translationsinvarianz). Wir betrachten dazu folgende allgemeinere Konstellation:



Verschiebung und Vergrößerung

$\tilde{B} = \{ rx + q \mid x \in B \}$

$r > 0$ fest

$q \in \mathbb{R}^d$ fest

(iii) Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ eine Borelsche Menge. Für gegebene $r > 0$, $q \in \mathbb{R}^d$ sei $\tilde{B}$ wie angegeben definiert. Dann ist auch $\tilde{B}$ eine Borelsche Menge, und für das Lebesgue-Borelsche Maß λ^d gilt

$$\lambda^d(\tilde{B}) = r^d \, \lambda^d(B).$$

<u>Beweis:</u> Einführung zweier Maße auf den Borelschen Mengen:

$$\mu_{r,q}(B) = \lambda^d(\underbrace{\{ rx + q : x \in B \}}_{\text{das \underline{ist} eine Borelmenge. Selbst überlegen!}}) \quad , \quad \tilde{\mu}_{r,q}(B) = r^d \, \lambda^d(B)$$

Beides sind Maße. Für alle Quader sind aber beide gleich, denn der Inhalt eines Quaders ist translationsinvariant und bei einer Streckung um r ergibt sich das r^d-fache des Inhalts. Gleiches folgt dann für den Ring der elementargeometr. Figuren, aber das hatten wir schon festgestellt. Da μ und $\tilde{\mu}$ auf allen Quadern gleich sind, fallen sie auch auf der σ-Algebra zusammen. $\square$

(iv) Ist P eine Permutationsmatrix, dann gilt

$$\lambda^d(\{Px : x \in A\}) = \lambda^d(A)$$

für alle Borelschen Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$.

(analog wie (iii) – für Quader passt's ...).

Abschließende Bemerkungen zum Maßproblem

- Es gibt Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, die nicht Lebesgue-messbar sind, folglich auch nicht BORELsch.
  Bauer, §8
- Eine sinnvolle Erweiterung des Lebesgue-Maßes auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist nicht möglich (Arbeiten von Hausdorff), vgl. Bauer, §8.

1.4. Messbare Funktionen

Wir gehen im Weiteren aus von einem allgemeinen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Als wichtigen Spezialfall haben wir natürlich auch $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \lambda^d)$ im Auge, wobei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen des $\mathbb{R}^d$ und λ^d das Borel-Lebesguesche Maß ist.

<u>Def 1.32</u> Eine Funktion $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißt *messbar*, wenn die Urbilder

$$f^{-1}(]c,\infty]) = \{x \in \Omega : f(x) > c\}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ messbar sind, d.h. zu $\mathcal{A}$ gehören.

Beachten Sie, dass f in den erweiterten Zahlbereich $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ abbilden darf.

<u>Bspe 1.33</u>

(i) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und λ^d das zugehörige Lebesgue-Borelsche Maß. <u>Dann ist jedes stetige $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar.</u>

Denn: $]c,\infty]$ ist eine offene Menge. Stetigkeit $\Rightarrow$ $f^{-1}(]c,\infty])$ ist offen, damit eine Borel-Menge, also messbar.

<u>Satz 1.34</u> Folgende Eigenschaften sind äquivalent.

(i) f ist messbar (im Sinne von Def. 1.32)

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) \geq c\}$ ist messbar für alle $c \in \mathbb{R}$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) < c\}$ —"—

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) \leq c\}$ —"—

<u>Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii):</u>

$$\{x : f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f(x) > c - \tfrac{1}{n}\}}_{\text{messbar } \forall n}$$

ist messbar als abzb. $\cap$ messb. Mengen.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii):</u>

$$\{x : f(x) < c\} = \underbrace{\Omega \setminus \underbrace{\{x : f(x) \geq c\}}_{\text{messb. wegen (ii)}}}_{\text{messbar}}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv):

$$\{x : f(x) \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > c + \tfrac{1}{n}\} \quad \text{meßbar!}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i):

$$\{x : f(x) > c\} = \Omega \setminus \{x : f(x) \le c\}. \qquad \square$$

Satz 1.35 Mit f und g sind auch $\max(f,g)$ sowie $\min(f,g)$ meßbar, insbesondere auch

$$f^+ := \max(f,0), \quad f^- = -\min(f,0),$$

und somit auch

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Beweis Betrachten $\max(f,g)$.

$$\{x : \max(f(x), g(x)) > c\} = \underbrace{\underbrace{\{x : f(x) > c\}}_{\text{meßbar}} \cup \underbrace{\{x : g(x) > c\}}_{\text{meßbar}}}_{\text{meßbar.}}$$

Analog für min. Für den Betrag gilt:

$$\{x : |f(x)| > c\} = \{x : f^+(x) > c\} \cup \{x : f^-(x) > c\}$$

(nur eins von beiden kann ungleich Null sein!)

und beide Mengen sind meßbar. $\square$

Die nächsten Sätze sind sehr wichtig. Sie befassen sich mit der Meßbarkeit der Grenzfunktion von Folgen meßbarer Funktionen.

Satz 1.36 Ist $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge meßbarer Funktionen, dann sind auch die folgenden Funktionen meßbar:

(i) $g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} f_n(x)$, $\quad \tilde{g}(x) := \limsup_{n \to \infty} f_n(x)$

(ii) $h(x) = \inf_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} f_n(x)$, $\quad \tilde{h}(x) := \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$.

Vor dem Beweis wiederholen wir die Berechnungsvorschrift für limes inferior und limes superior für Zahlenfolgen:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k .$$

<u>Beweis:</u> Zeigen (i), (ii) geht analog.

$\{x : g(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > c\}$ ist offenbar messbar $\forall c$.

Messbarkeit von lim sup: Nach obiger Konstruktion gilt

$$\tilde{g}(x) = \inf_m g_m(x) \quad \text{mit} \quad g_m(x) := \sup_{k\geq m} f_k(x)$$

Beachte, dass (für festes x) $(g_m(x))$ monoton fallend ist, also

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \inf_m g_m(x).$$

$\Rightarrow$ (wegen (ii)) Messbarkeit von $\tilde{g}$. $\square$

<u>Folgerung</u> Ist (f_n) eine Folge punktweise konvergenter messbarer Funktionen, dann ist auch die Grenzfunktion f,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

messbar.

<u>Beweis:</u> Wegen Konvergenz gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. $\square$

Die Komposition einer stetigen Funktion mit einer messbaren ist messbar, wie die folgende etwas allgemeinere Aussage zeigt. Die Komposition einer messbaren Funktion mit einer stetigen muss dies nicht notw. sein!

<u>Satz 1.37</u> Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist h, $h(x) = F(f(x), g(x))$, messbar.

Beweis
$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : F(u,v) > c\} =: G_c$$
ist offen, da F stetig. Als offene Menge ist G abzählbare Vereinigung offener Rechtecke (man lege solche um "rationale Vektoren"), $G_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$
$$Q_n = \{ (u,v) : a_n < u < b_n,\ c_n < v < d_n \}.$$
Die Mengen
$$\{x : a_n < f(x) < b_n\},\ \{x : c_n < g(x) < d_n\}$$
sind offenbar meßbar. Warum?
$$\Rightarrow \{x : (f(x), g(x)) \in Q_n\}$$
$$= \{x : a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x : c_n < g(x) < d_n\}$$
sind auch meßbar $\forall n$.
$$\Rightarrow \{x : h(x) > c\} = \{x : (f(x), g(x)) \in G_c\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : (f(x), g(x)) \in Q_n\}$$
ist meßbar für jedes c. $\square$

Folgerung Die Summe und das Produkt zweier meßbarer reellwertiger (!) Funktionen sowie das Produkt einer meßbaren Funktion mit einer reellen Zahl sind meßbar.

Beachte: Sind f, g numerische Funktionen (Werte in $\overline{\mathbb{R}}$), dann kann $f \pm g$ undefiniert sein.

Bisher haben wir reellwertige Funktionen betrachtet. Sind $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$, allgemeine Maßräume und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, dann heißt f meßbar, wenn das Urbild $f^{-1}(A) \subset \Omega_1$ jeder Menge $A \in \mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_1$ liegt.
"Urbilder meßbarer Mengen sind meßbar."