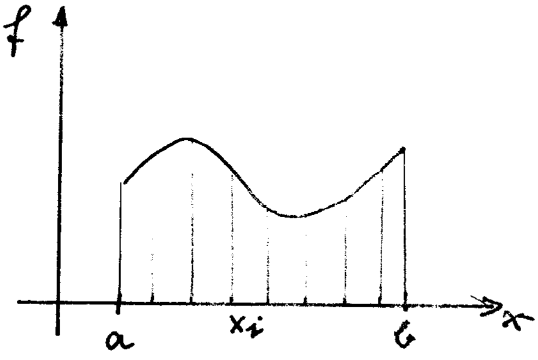
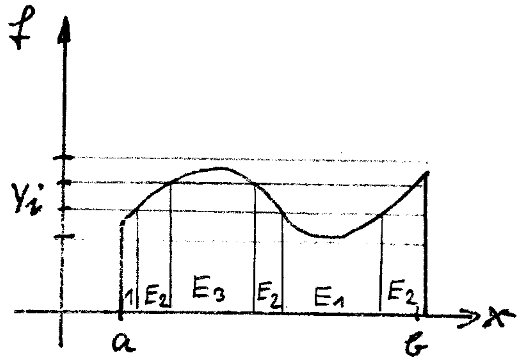
1.5. Das Lebesgue-Integral

Von der Grundidee her unterscheidet sich die Konstruktion des Lebesgue-Integrals wesentlich von Riemanns Idee:





Riemanns Konstr.:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

Konstr. des $\mathcal{L}$-Integrals

$$E_i = \{x \mid y_{i-1} \le f(x) < y_i\}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum y_i\,\lambda(E_i)$$

Sie werden die rechte Konstruktion so nicht direkt sehen, sie steht aber als Leitfaden hinter der weiteren Herangehensweise.

<u>Weiterhin:</u> Allgemeiner Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

<u>Def 1.38</u> Eine <u>messbare</u> Funktion $f : \Omega \to [0,\infty[$, die nur endlich viele Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ annimmt, heißt <u>Elementarfunktion</u>.

Wir nehmen o.B.d.A. $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ an.

Im Unterschied zu Treppenfunktionen (Bild in $\mathbb{R}$) dürfen Elementarfunktionen keine negativen Werte annehmen.

Nach Voraussetzung sind für Elementarfunktionen die Mengen

$$A_i = \{x \in \Omega : f(x) = \alpha_i\}$$

messbar. Warum? Damit ist auch messbar χ_{A_i},

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_i \\ 0 & x \in \Omega \setminus A_i \end{cases},$$

die charakterist. Funktion von A_i. Wir haben

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad \text{Normaldarstellg. von } f.$$

Def. 1.39 Das Integral der o.g. Elementarfunktion f ist definiert durch

$$\int f\,d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu(A_i).$$

Genauere Bezeichnungsweise: μ-Integral von f über Ω.

Man könnte auch $\int_\Omega f\,d\mu$ schreiben. Da aber Ω die gegebene Grundmenge ist, kann man auf die Angabe von Ω verzichten. Das Integral kann den Wert $+\infty$ annehmen; jetzt wird auch klar, warum Elementarfunktionen nichtnegativ sein sollen.

Offenbar kann ein und dieselbe Elementarfunktion ganz verschiedene Normaldarstellungen haben. Man kann aber zeigen, daß der Wert des Integrals unabhängig von der gewählten Normaldarstellung ist. Tutorium b.w.

Beispiele 1.40

(i) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; $A \in \Omega$ sei gegeben

χ_A ist dann meßbar, wenn $A \in \mathcal{A}$. Diese Funktion ist Elementarfunktion mit $A_1 = A$, $A_2 = \Omega \setminus A$ und

$$\int \chi_A\,d\mu = 1\cdot\mu(A) + 0\cdot\mu(\Omega\setminus A) = \mu(A).$$

(ii) Dirichlet-Funktion $f: \mathbb{R} \to [0,\infty[$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

Tut: $\lambda(\mathbb{Q})$ berechnen

Es sei $\lambda = \lambda^1$ das Lebesgue-Maß, $\Omega = \mathbb{R}$.

Dann

$$\int f\,d\lambda = \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0}\cdot 1 + \underbrace{0\cdot\underbrace{\lambda(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{=\infty}}_{=0\,!} = 0$$

#

An diesem Beispiel zeigt sich, daß wir folgende Vereinbarungen treffen müssen:

$$\boxed{0\cdot\infty = 0, \quad \infty+\infty = \infty.}$$

Es gelten nun wieder die üblichen Integrationsregeln:

Satz 1.41 Mit f und g sind auch $f+g$, fg sowie, für alle $c \in \mathbb{R}$, auch cf Elementarfunktionen. Dabei gilt

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$$

$$\int (cf)\,d\mu = c\int f\,d\mu .$$

Gilt $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in \Omega$, dann auch

$$\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$$

Beweis: Übungen.

Den ersten Schritt in Richtung der Integration allgemeinerer Funktionen macht die folgende Aussage:

Satz 1.42 Jede messbare Funktion $f: \Omega \to [0,\infty]$ ist das Supremum einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen.

Beweis: (Vgl. die Skizze auf S.34) Wir unterteilen den Wertebereich $[0,\infty]$ in $[0,n[$ und $[n,\infty]$ und den ersten Teil in $n\cdot 2^n$ Intervalle gleicher Länge 2^{-n}:

$$\frac{i-1}{2^n} \le y < \frac{i}{2^n} \qquad i = 1,2,\dots, n2^n$$

Setzen

$$A_{ni} = \{x : \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n}\}$$

$$B_n = \{x : n \le f(x)\}.$$

Als repräsentative Funktionswerte von f_n nehmen wir jeweils den kleinsten Wert ($\frac{i-1}{2^n}$ bzw. n) und setzen

$$f_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n}\chi_{A_{ni}} + n\,\chi_{B_n} .$$

Auf Grund der sehr geschickten Wahl der Zerlegung von $[0,\infty]$ (man betrachte die Zerlegung z.B. für $n=1,2,3$)

b.w. HA

erkennt man nach etwas Überlegung, dass die Folge (f_n) das Gewünschte tut. $\square$

Die Grundidee der weiteren Vorgehensweise ist nun diese:
Für Elementarfunktionen f_n haben wir das Integral. Somit sollte für $f_n(x) \to f(x)$ die Definition

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

sinnvoll sein. Allerdings muss man dazu zeigen, dass die Auswahl der Folge (f_n) dabei keine Rolle spielt!

Satz 1.43 Für jede Elementarfunktion f und jede monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen f_n folgt aus

$$f(x) \leq \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

die Ungleichung

$$\int f \, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

Beweis: Wegen $f_n(x) \geq 0$ $\forall x$ ist die Aussage trivial für $f \equiv 0$. Daher nehmen wir an, dass

$$A := \{x : f(x) > 0\} \neq \emptyset .$$

Offenbar ist A messbar. Wir betrachten

$$\alpha := \min\{f(x) : x \in A\}$$
$$\beta := \max\{f(x) : x \in A\}$$

Beide Werte existieren als positive Werte, weil f Elementarfunktion ist. Wir wissen $f(x) \leq \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Definieren

$$A_n := \{x \in A : f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon\},$$

wobei $0 < \varepsilon < \alpha$ beliebig vorgegeben ist. Monotonie $\Rightarrow$

$$A_{n+1} \supset A_n \quad \forall n.$$

Wegen $\lim f_n(x) \geq f(x)$ kommt jedes $x \in A$ "dran", $\Rightarrow$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Betrachten nun die "Zuwächse" $\mathcal{B}_1 = A_1$

$$\mathcal{B}_n := A_n \setminus A_{n-1}\ ,\ n \geq 2.$$

Die $\mathcal{B}_n$ sind paarweise disjunkt. Ferner

$$A_n = \bigcup_1^n \mathcal{B}_k\ ,\quad A = \bigcup_1^\infty \mathcal{B}_k\ .$$

σ-Additivität von μ $\Rightarrow$

$$\mu(A_n) = \sum_1^n \mu(\mathcal{B}_k)\ ,\quad \mu(A) = \sum_1^\infty \mu(\mathcal{B}_k),$$

deshalb

$$\mu(A_n) \to \mu(A)\ ,\ n \to \infty.$$

Nach Def. von A_n:

$$f_n \geq (\underbrace{f}_{\geq \alpha} - \varepsilon)\,\chi_{A_n} \geq (\alpha - \varepsilon)\,\chi_{A_n}$$

Daraus folgt nach Integration wegen Monotonie des Integrals

$$\int f_n\, d\mu \geq (\alpha-\varepsilon) \underbrace{\int \chi_{A_n}\, d\mu}_{\mu(A_n)} = (\alpha-\varepsilon)\mu(A_n).$$

<u>Fall 1</u>: $\mu(A) = \infty$. Dann $\mu(A_n) \to \infty$, also

$$\int f_n\, d\mu \to \infty$$

und der Satz ist richtig.

<u>Fall 2</u> $\mu(A) < \infty$. Setzen $C_n := A \setminus A_n$ "Rest"

Damit

$$\underbrace{f_n(x)}_{\substack{\geq f(x)-\varepsilon \\ \text{auf } A_n}} + (\underbrace{\beta}_{\geq f(x)} - \varepsilon)\,\chi_{C_n}(x) + \varepsilon\,\chi_A(x)$$

$$\geq \underbrace{(f(x)-\varepsilon)\,\chi_{A_n}(x) + (f(x)-\varepsilon)\,\chi_{C_n}(x)}_{\sim A_n \qquad\qquad \sim A \setminus A_n} + \varepsilon\,\chi_A(x)$$

$$= (f(x)-\varepsilon)\,\chi_A(x) + \varepsilon\,\chi_A(x)$$

$$= f(x).$$

Nach Integration, mit $\mu(C_n) = \mu(A) - \mu(A_n)$,

$$\int f_n\,d\mu + \underbrace{\int (\beta-\varepsilon)\chi_{C_n}\,d\mu}_{(\beta-\varepsilon)\mu(C_n)} + \underbrace{\int \varepsilon\chi_A\,d\mu}_{\varepsilon\mu(A)} \geq \int f\,d\mu$$

$$\int f_n\,d\mu + (\beta-\varepsilon)\underbrace{(\mu(A)-\mu(A_n))}_{\to 0} + \varepsilon\mu(A) \geq \int f\,d\mu$$

$n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu + \varepsilon\mu(A) \geq \int f\,d\mu.$$

Aussage des Satzes folgt aus der Beliebigkeit von ε. $\square$

Folgerung

Sind nun (f_n), (g_n) zwei monoton wachsende Folgen von Elementarfunktionen, die punktweise gegen den gleichen Grenzwert konvergieren,

$$f_n(x)\to f(x),\quad g_n(x)\to f(x)\quad,\ n\to\infty,$$

dann erhält man

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu.$$

Beweis:

Für jedes feste $m=1,2,\dots$ gilt

$$f_m(x)\leq \lim_{n\to\infty} g_n(x) \qquad (\text{denn } f_m(x)\leq f(x))$$

Letzter Satz mit $f:=f_m$,

$$\int f_m\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu.$$

$m\to\infty \Rightarrow$

$$\lim_{m\to\infty}\int f_m\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu.$$

Rollentausch von f_n, g_n $\Rightarrow$

$$\dots \geq \dots$$

Deshalb folgt Gleichheit! $\square$

Def. 1.44 Ist ein meßbares $f:\Omega\to[0,\infty]$ punktweiser Grenzwert einer monoton wachsender Elementarfunktionen f_n, dann nennen wir den Wert

$$\boxed{\int f\,d\mu := \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu}$$

das Integral von f über Ω.