Diese Definition ist gerechtfertigt, weil nach dem eben Gezeigten der Wert des Integrals nicht von der Auswahl der Folge (f_n) abhängt.

Wir sind noch immer bei <u>nichtnegativen</u> Funktionen.

<u>Satz 1.45</u> Für alle meßbaren Funktionen $f, g : \Omega \to [0,\infty]$ und alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$$

$$\int (cf)\,d\mu = c \int f\,d\mu$$

und im Falle $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in \Omega$:

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu.$$

<u>Beweis:</u> Ist mehr oder weniger Fleißarbeit $\Rightarrow$ Übung (□) Ü.A.

Nun wollen wir auf die Nichtnegativität des Integranden verzichten. Wir müssen dann sichern, daß das Integral nicht nur deshalb existiert, weil sich positiver und negativer Teil gegenseitig neutralisieren.

<u>Def 1.46</u> Eine meßbare Funktion $f : \Omega \to [-\infty,\infty]$ heißt <u>über Ω integrierbar</u>, wenn

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad \underline{\text{und}} \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

In diesem Fall setzt man

$$\boxed{\int f\,d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}$$

Zur Illustration betrachten wir zunächst einige einfache

<u>Beispiele 1.47</u>

(i) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda$ (Lebesgue-Borel-Maß)

<u>$f(x) \equiv 1$</u>: $\quad \int f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1\,d\lambda = \infty$

(f ist Elementarfunktion, $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$,

$\int f\,d\lambda = 1 \cdot \underbrace{\lambda(\mathbb{R})}_{\infty} = \infty.$)

(ii) $\mathbb{R}$, λ wie in (i)

$$f(x)=\begin{cases}-1\,, & x<0\\ 1\,, & x\ge 0\end{cases}$$

f ist nicht integrierbar, denn sowohl $\int f^+ d\lambda$ als auch $\int f^- d\lambda$ sind unendlich

(iii)
$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{n^2} & -n\le x<-n+1 \quad n=1,2,\dots\\ \frac{1}{n^2} & n-1\le x<n \quad n=1,2,\dots\end{cases}$$

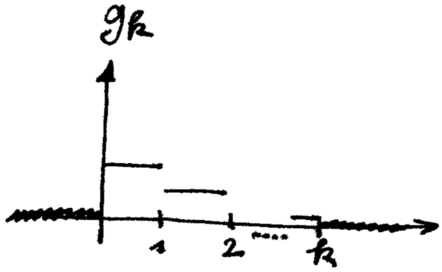
f ist integrierbar: $\int f^+ d\lambda, \int f^- d\lambda$ sind beide endlich.

z.B f^+:
$$f^+(x)=\begin{cases}0\,, & x<0\\ \frac{1}{n^2}\,, & n-1\le x<n\,, \quad n=1,2,\dots\end{cases}$$

f^+ ist keine Elementarfunktion, aber

$$f^+(x)=\lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

mit
$$g_k(x)=\begin{cases}f^+(x), & x<k\\ 0\,, & x\ge 0.\end{cases}$$



Alle g_k sind Elementarfunktionen und die Folge (g_k) ist monoton wachsend

$$\Rightarrow \int f^+ d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int g_k\, d\lambda \overset{\lim_{k\to\infty}}{=} \frac{1}{1}\lambda([0,1[)+\frac{1}{4}\lambda([1,2[)+ \dots + \frac{1}{k^2}\lambda([k-1,k[)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int f\, d\lambda = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{6}=0.$$

#

Für integrierbare Funktionen ergeben sich nun wieder die üblichen Integrationsregeln:

<u>Satz 1.48</u> Für integrierbare $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ und $c \in \mathbb{R}$ gelten die in Satz 1.45 formulierten Regeln.

<u>Beweis</u>: Es gilt

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

(man prüft die Fälle f, g gleicher Vorzeichen sowie unterschiedl. Vorzeichen schnell nach). Somit – alle Funktionen sind nichtnegativ, so dass Satz 1.45 anwendbar ist –

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int (f+g)^+ - \int (f+g)^- d\mu}_{} = \underbrace{\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}_{} + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

$$\Rightarrow \quad \int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu .$$

Die zweite Aussage folgt so:

$$c \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\int (cf)^+ d\mu - \int (cf^-) d\mu}_{\int (cf)\, d\mu} = \int c f^+ d\mu - \int c f^- d\mu$$

$$= c\,(\underbrace{\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}_{\int f\, d\mu})$$

$$c < 0 \Rightarrow \int \underbrace{(cf)^+}_{|c| f^-} d\mu - \int (cf)^- d\mu = |c| (\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu)$$

$$= c (\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) \ldots$$

Gilt punktweise $f \leq g$, dann $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$, also

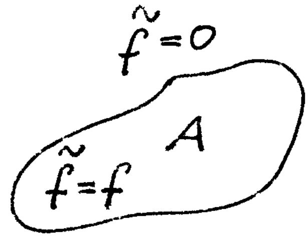
$$f^+ + g^- \leq f^- + g^+$$

und nach Integration und Umstellung wieder

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \qquad \square$$

Bisher erstreckten sich alle Integrale über ganz Ω, z.B. über $\Omega = \mathbb{R}^d$. Oft will man aber nur Funktionen über Teilmengen $A \subset \Omega$ integrieren. Dazu ist vorauszusetzen, dass A messbar ist. Dann ist offenbar auch χ_A messbar. Die charakteristische Funktion schneidet in gewissem Sinne A aus Ω heraus. Soll f nur über A integriert werden, so ist es offenbar sinnvoll,

$$\tilde{f} := \chi_A f$$



über Ω zu integrieren.

$\Rightarrow$

<u>Def 1.49</u> Eine messbare Funktion $f: \Omega \to [-\infty, \infty]$ heißt integrierbar über einer messbaren Teilmenge $A \subset \Omega$, wenn $\chi_A f$ integrierbar ist. In diesem Falle setzen wir

$$\int_A f \, d\mu := \int \chi_A f \, d\mu .$$

Unmittelbar aus dieser Definition ergibt sich folgende Integrationsregel:

A, B messbar, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$\boxed{\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu}$$

<u>Denn:</u> $\chi_{A \cup B} \underset{\substack{\uparrow \\ A \cap B = \emptyset}}{=} \chi_A + \chi_B$; Satz 1.48 anwenden. $\square$

<u>Def 1.50</u> (<u>"fast überall"</u>) Man sagt, dass eine Aussage <u>fast überall</u> (in Ω) gilt, wenn eine (μ-) Nullmenge $N \subset \Omega$ existiert, so dass die Aussage für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt. (d.h. Aussage gilt mit Ausnahme einer Nullmenge). <u>Auch:</u> <u>für fast alle $x \in \Omega$</u>.

Bsp: $\Omega = \mathbb{R}$; μ = Lebesgue-Maß

(i) Fast alle $x \in \mathbb{R}$ sind irrational.

(ii) Integrierbare Funktionen sind fast überall endlich — H.A.

Satz 1.51 Ist $A \subset \Omega$ eine Nullmenge, dann gilt

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

Beweis: • Für Elementarfunktionen f gilt das (f ist jeweils konstant auf $A \cap A_i$ und $A \cap A_i$ sind jeweils Nullmengen)

• Ist $f \geq 0$, dann wissen wir $f = \lim_{n \to \infty} \underbrace{f_n}_{\text{Elementarfkt.}}$ und da $\int_A f_n \, d\mu = 0$ $\forall n$ folgt die Aussage auch für f, falls nur $\chi_A f$ messbar ist (z.B. wenn f das ist)

• Analog erweitert man die Aussage auf beliebiges integrierbares f. □

! Folgerung Stimmen zwei integrierbare Funktionen fast überall überein, dann sind ihre Integrale gleich:

$$f = g \text{ f.ü.} \Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

$\Rightarrow$ Ändert man eine Funktion auf einer Menge vom Maß Null ab, dann bleibt ihr Integral gleich.