1.6. Die großen Konvergenzsätze

Wir behandeln in diesem Abschnitt die für die Theorie der Integration fundamentalen Konvergenzsätze, die so allgemein für Riemannsche oder Regelintegrale nicht gelten.

Welche Voraussetzungen brauchten wir für die Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration?

Ist $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so wissen wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

falls (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Dabei ist $\int_a^b \ldots dx$ das Riemann-Integral.

Wir kommen jetzt mit viel schwächeren Voraussetzungen aus.

Satz 1.52 (Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz)

Ist (f_n) eine monoton wachsende Folge messbarer nichtnegativer Funktionen und f die zugehörige Grenzfunktion. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f\,d\mu.$$

Bemerkung: Die Grenzfunktion f ist ebenfalls messbar aber kann durchaus den Wert $+\infty$ annehmen (vgl. Folgerung aus Satz 1.36).

Beweis des Satzes: Offenbar gilt $f_n(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Deshalb

$$\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu \quad \forall n \qquad \text{(Satz 1.45)}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu \qquad (*)$$

(der Grenzwert existiert in $[0,\infty]$; warum?).

Es reicht daher, eine Folge von <u>Elementarfunktionen</u> $\tilde{f}_n$ zu konstruieren mit

$$\tilde{f}_n(x) \le f_n(x) \quad \forall n, \forall x$$
$$\tilde{f}_n(x) \to f(x), \; n \to \infty, \; \forall x.$$

Dann folgt nämlich

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n \, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

(vgl. die Def. des Integrals über eine Folge von Elementarfunktionen)

und mit (*) die Gleichheit.

Wegen Meßbarkeit von f_n existiert eine monoton wachsende Folge von Elementarfunktionen $(f_{mn})_{m=1}^{\infty}$ mit

$$f_{mn}(x) \to f_n(x), \; m \to \infty \qquad \text{(Satz 1.42).}$$

Nun bilden wir die Elementarfunktionen

$$\tilde{f}_m(x) := \max_{n \in \{1,\dots,m\}} f_{mn}(x).$$

Dann gilt $\tilde{f}_m(x) \le \tilde{f}_{m+1}(x)$, denn $f_{mn} \le f_{m+1,n} \; \forall n$ (Monotonie!)

Für $n \le m$ folgt

$$f_{mn} \underset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{von } (f_{mn})_m}}{\le} f_n \underset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{von } (f_n)}}{\le} f_m.$$

Bilden wir links das Maximum für $n \in \{1,\dots,m\}$, so folgt

$$\tilde{f}_m(x) \le f_m(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \tilde{f}_m(x) \le \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x). \qquad (**)$$

Umgekehrt gilt

$$f_{mn} \le \tilde{f}_m \quad \text{für } m \ge n$$

(jedes solche f_{mn} kommt ja bei der Berechnung von $\tilde{f}_m$ vor)

Folglich

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_{mn}(x) \leq \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

$\Rightarrow (n\to\infty)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq \lim_{m\to\infty} \tilde{f}_m(x).$$

Zusammen mit $(**)$ folgt daraus

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{f}_m(x) = f(x)$$

und damit leistet die Folge $(\tilde{f}_m)$ das Gewünschte. □

Ebenso bekannt und fundamental ist

<u>Satz 1.53</u> (Lemma von Fatou) Ist (f_n) eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

dann gilt

$$\boxed{\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

<u>Beweis</u>: Wir definieren

$$g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

Offenbar sind alle g_n messbar und die Folge (g_n) ist monoton wachsend. Klar ist auch

$$g_n(x) \leq f_n(x) \quad \forall n.$$

Nach unserer Konstruktionsvorschrift für die Bildung von lim inf folgt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Nach dem Satz von B. Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

$$\text{also} = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu. \qquad (+)$$

Andererseits gilt

$$g_n(x) \le f_k(x) \quad \forall k \ge n$$

$$\Rightarrow \quad \int g_n \, d\mu \le \int f_k \, d\mu \quad \text{"}$$

$$\Rightarrow \quad \int g_n \, d\mu \le \underbrace{\inf_{k \ge n} \int f_k \, d\mu}_{\to \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)}$$

$n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \quad (++)$$

Aus (+) und (++) folgt die Behauptung. □

Man kann Beispiele angeben, dass die Gleichheit in der eingerahmten Formel i.a. nicht gilt.

Nun kommt der dritte der großen Konvergenzsätze, der wahrscheinlich am meisten angewendet wird.

Satz 1.54 (Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz)
Es sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen, die fast überall gegen f konvergiert,

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Es existiere eine integrierbare Funktion g mit

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall n, \text{ für fast alle } x.$$

Dann ist auch f integrierbar und

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.}$$

Beweis: o.B.d.A können wir annehmen

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

(Wenn nicht, d.h. $f_n(x) \not\to f(x)$ $\forall x \in N \subset \Omega$ mit $\mu(N) = 0$, dann ändern wir alle f_n und f auf N passend ab, z.B.

$$f_n(x) := 0, \quad f(x) := 0 \qquad \forall x \in N.$$

Die Integrale ändern sich dann nicht!)

$$\Rightarrow \qquad |f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir wissen, daß $|f|$ meßbar ist und nichtnegativ. Also existiert $\int |f|\, d\mu$ und

$$\int |f|\, d\mu \le \int g\, d\mu < \infty,$$

also ist mit g auch f integrierbar. Ferner gilt natürlich

$$f(x)+g(x) \ge 0 \text{ und } f_n(x)+g(x) \ge 0 \qquad \forall x, \forall n$$

Lemma von Fatou

$$\int (f+g)\, d\mu \left(= \int \lim_{n\to\infty} (f_n+g)\, d\mu\right) = \int \liminf_{n\to\infty} (f_n+g)\, d\mu$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} \int (f_n+g)\, d\mu .$$

Ziehen wir $\int g\, d\mu$ auf beiden Seiten ab, dann

$$\int f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu .$$

Ganz analog gilt

$$-f(x) + g(x) \ge 0 \quad \text{u.} \quad -f_n(x)+g(x) \ge 0 \quad \forall x, n.$$

So bekommt man auf gleiche Weise

$$\int (-f+g)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n+g)\, d\mu,$$

somit

$$-\int f\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \left(-\int f_n\, d\mu\right) = -\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu .$$

$$\Rightarrow \qquad \int f\, d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu .$$

Jetzt haben wir alles zusammen, denn

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

impliziert lim sup = lim inf und daher

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu. \qquad \square$$

Bemerkungen

(i) Wir dürfen also unter den Voraussetzungen des Satzes Integration und Grenzwertbildung vertauschen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

(ii) Ein einfaches Beispiel zeigt die Vorteile der Lebesgue-Theorie:

$\Omega := [0,1]$

$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \dots$

Wir wissen:

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Natürlich wissen wir sofort für das Riemann-Integral

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int f(x)\,dx,$$

weil wir hier die Integrale ausrechnen können und weil f, obwohl unstetig in einem Punkt, Riemann integrierbar ist.

ABER: (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen f, daher können wir allgemeine Aussagen für die Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration nicht anwenden (im Bereich des Riemann-Integrals). Diese setzen ja gleichmäßige Konvergenz voraus.

Mit dem Satz von Lebesgue geht das problemlos!
Wir zeigen in den Übungen, dass für Riemann-integrierbare Funktionen gilt

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b f\,d\lambda$$

↑ 1-d-Lebesgue-Maß.

Offenbar gilt

- $f_n(x) = x^n \to 0$ f.ü. auf $[0,1]$
- $|f_n(x)| \leq 1 \quad \forall n$ auf $[0,1]$
- $g(x) \equiv 1$ ist Lebesgue-integrierbar (obige Bem.)

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\,dx$$

mit dem Satz von Lebesgue, <u>ohne</u> die Integrale ausrechnen zu müssen.

Zugegeben, bei unserem sehr einfachen Beispiel hätten wir den Satz nicht gebraucht, aber die Vorteile sind gut sichtbar.

(iii) In der englischsprachigen Fachliteratur heißt der Satz

"Lebesgue dominated convergence theorem"